Das

Problem des Apollonius

nebst

den Theorien der Potenzörter, Potenzpunkte, Aehnlichkeitspunkte, Aehnlichkeitsgeraden, Potenzkreise, Pole und Polaren

im Sinne der neueren Geometrie

für alle Lagen der gegebenen Kreise

leicht fasslich dargestellt

von

C. Hellwig,
ord. Lehrer an der Realschule zu Erfurt.

Mit 4 Figurentafeln.

Halle,
Druck und Verlag von H. W. Schmidt.
1856.

Vorrede.

Apollonius (um 247 v. Chr.) ist der älteste mathematische Schriftsteller, welcher die Aufgabe, Kreise zu beschreiben, von welchen drei gegebene Kreise (Gerade oder Punkte) zugleich berührt werden, in einer besonderen, zwei Bücher umfassenden Schrift ausführlich behandelt hat. Wenn diese Arbeit leider verloren gegangen ist, so hat man sie doch nach Anleitung der Angaben, welche Pappus (zu Ende des vierten Jahrh. n. Chr.) in Betreff der dabei von Apollonius benutzten Sätze uns aufbewahrte, wieder herzustellen versucht, zuerst Vieta (1540—1603) in seinem *Apollonius Gallus.* Durch diese Untersuchungen ist es wahrscheinlich geworden, dass Apollonius von der Betrachtung der besonderen Fälle, in welchen einer oder mehrere Kreise der allgemeinen Aufgabe, die drei Kreise voraussetzt, durch Gerade oder Punkte ersetzt werden, zur Erörterung des allgemeinen Falles fortschritt. Die Entwickelungen der neueren Geometrie setzen uns in den Stand, sofort für den allgemeinen Fall Lösungen zu finden, welche, vorzugsweise auf die Eigenschaften etlicher für die Kreislehre sehr wichtiger geometrischer Oerter gegründet, an Eleganz Nichts zu wünschen übrig lassen. Die Schriftsteller scheinen indess einen Fall unberücksichtigt gelassen zu haben, der gleichwohl eine besondere Berücksichtigung verdient, nämlich den, in welchem die Mittelpunkte der gegebenen Kreise derselben Geraden angehören. Um eine auch für diesen Fall gültige

Auflösung hinzustellen, wird es nöthig, die Theorie der sogenannten Potenzlinie zu erweitern. Beide Lücken will die vorliegende Schrift ausfüllen. Zu dem Ende ist in die vorbereitenden Betrachtungen neben den Theorien der oben angedeuteten geometrischen Oerter diejenige des „zweiten Potenzortes,“ welchem in Grunert's Archiv unter der Bezeichnung „Linie äquidifferenter Potenzen“ ein Aufsatz von Dr. Kösters gewidmet ist, aufgenommen und mit der des „ersten Potenzortes“ (Potenzlinie) verknüpft worden. Zur passenden Bezeichnung und Unterscheidung dieser beiden Oerter habe ich mir die eben angeführten Benennungen anzuwenden erlaubt, weil sie von den bisherigen nicht wesentlich abweichen und für jenen Ort einen kürzeren Namen gewähren. An die Herleitung der Auflösungen der allgemeinen Aufgabe, für alle Lagen der gegebenen Kreise, sind sodann, um dieselben auch auf solche Fälle anwenden zu können, in welchen von den gegebenen Kreisen einer oder mehrere durch Gerade oder Punkte ersetzt werden, Grenzbetrachtungen über die zur Construction nothwendigen Elemente angeschlossen worden, welche ganz abgesehen von den aus ihnen resultirenden Ergebnissen wohl geeignet sein möchten, dem Anfänger den Weg zu zeigen, welcher bei anderen ähnlichen Untersuchungen einzuschlagen ist. Den Schluss bildet die Bestimmung derjenigen sechs Kreise, von welchen jeder vier von den acht Berührungskreisen der drei gegebenen Kreise berührt, eine Betrachtung, welche theils zu lehrreichen Recapitulationen Veranlassung giebt, theils eine interessante Anwendung der ersten von den mitgetheilten Auflösungen des Problems darbietet.

Erfurt, im Februar 1856.

Der Verfasser.

§. 1.

Die Potenzörter.

Wenn zwei Kreise, wie M_1 und M_2 in Fig. 1., in zwei Punkten B_1 und B_2 sich schneiden, so geht durch diese hindurch ihre gemeinschaftliche Sehne B_1B_2, auf welcher ihre Centrale M_1M_2, wie sich durch Congruenz der Dreiecke leicht nachweisen lässt, in D, dem Durchschnittspunkt beider, senkrecht steht; und zugleich ist dieser Durchschnitt D der Halbirungspunkt der Sehne B_1B_2.

Zieht man nun die Geraden B_1M_1 und B_1M_2, so ist:

$$B_1D^2 = M_1B_1{}^2 - M_1D^2 = M_2B_1{}^2 - M_2D^2 \text{ (pythag. Lehrs.)}$$

oder, wenn man M_1D^2 und $M_2B_1{}^2$ transponirt:

$$M_1B_1{}^2 - M_2B_1{}^2 = M_1D^2 - M_2D^2,$$

d. h. wenn M_1B_1 und M_2B_1 bezüglich mit R_1 und R_2 bezeichnet werden: (1) $M_1D^2 - M_2D^2 = R_1{}^2 - R_2{}^2$.

Diese Gleichung lässt sich auch, wenn man die Differenz der Quadrate auf der einen, wie auf der anderen Seite durch das Product der Summe und Differenz der Seiten ersetzt und berücksichtigt, dass $M_1D + M_2D = M_1M_2$ ist, in folgende Form bringen:

$$(2)\quad M_1M_2 \,.\, (M_1D - M_2D) = (R_1 + R_2) \,.\, R_1 - R_2).$$

Die hierin enthaltene Beziehung kann man benutzen zur anderweitigen Construction des Punktes D. Zieht man nämlich durch M_1 den Durchmesser $E_1E_2 \parallel B_1M_2$ und durch B_1 die Gerade $B_1F \parallel M_2M_1$ und bezeichnet durch H den Durchschnitt von E_1E_2 mit B_1F, so bestehen folgende Beziehungen:

$$E_2H = M_1E_2 + M_1H = M_1E_2 + M_2B_1 = R_1 + R_2,$$
$$E_1H = M_1E_1 - M_1H = M_1E_1 - M_2B_1 = R_1 - R_2,$$
$$HB_1 = M_1M_2;$$

ferner hat man nach einem bekannten Satze der Kreislehre:

$$E_2H \,.\, E_1H = HB_1 \,.\, HF,$$

d. h. wegen der vorstehenden Werthe:

$$(3)\quad (R_1 + R_2) \,.\, (R_1 - R_2) = M_1M_2 \,.\, HF,$$

eine Relation, deren Vergleichung mit (2) zu der Folgerung führt, dass $HF = M_1D - M_2D$ sein muss.

Ausserdem ist ersichtlich, dass, wenn man von M_1 auf B_1F das Loth M_1K fällt, dieses die Sehne B_1F in K halbirt und $FK = M_1D$ macht. Man könnte also durch Abtragung der Länge FK von M_1 aus nach M_2 hin den Punkt D finden.

Wenn auch die eben angestellte Betrachtung müssig erscheint, wie sie in der That für den vorliegenden Fall weitläufig und ziemlich nutzlos ist, so hat sie doch des Folgenden wegen entschiedene Wichtigkeit.

Vorläufig aber verweilen wir noch einen Augenblick bei der gemeinschaftlichen Sehne B_1B_2.

In der Gleichung (1) ist enthalten:

Lehrsatz 1. *Die gemeinschaftliche Sehne zweier sich schneidenden Kreise theilt die Centrale so in zwei Abschnitte, dass die Differenz der Quadrate derselben der Differenz der Quadrate der Radien gleich ist.*

Durch Verlängerung der Sehne B_1B_2 erhält man in der unbegrenzten Geraden G_1G_2 die gemeinschaftliche Sekante der beiden Kreise M_1 und M_2; wenn man auf dieser einen beliebigen Punkt durch P bezeichnet und denselben mit M_1 und M_2 verbindet, so hat man: $PD^2 = M_1P^2 - M_1D^2 = M_2P^2 - M_2D^2$

und folglich auch: $M_1P^2 - M_2P^2 = M_1D^2 - M_2D^2$,

wodurch wir in Verbindung mit Gl. (1) zu

$$(4)\quad M_1P^2 - M_2P^2 = R_1{}^2 - R_2{}^2$$ gelangen.

Diese Gleichung giebt:

Lehrsatz 2. *Jeder Punkt auf der gemeinschaftlichen Sekante zweier sich schneidenden Kreise hat die Eigenschaft, dass die Differenz der Quadrate seiner Verbindungsgeraden mit den Mittelpunkten der Kreise gleich ist der Differenz der Quadrate der Radien.*

Wenden wir uns jetzt zur Betrachtung zweier Kreise M_1 und M_2, welche sich nicht schneiden, wie in Fig. 2. und 3., so existirt auch bei ihnen trotz des Mangels an Durchschnitten eine Gerade, welche mit der im obigen Lehrsatz ausgesprochenen Eigenschaft ausgestattet ist. Um dieselbe aufzufinden, bedienen wir uns

der Construction, welche wir oben auf Gl. (2) fussend angegeben haben, indem wir sie der veränderten Lage angemessen modificiren. Dann stellt sie sich folgendermassen dar. Wir ziehen die Centrale M_1M_2 und darauf senkrecht die Radien M_1E_1 (verlängert bis E_2) und M_2E_3, die mithin auch zu einander parallel sind, und legen, da hier die Endpunkte der Radien E_1 und E_3 verschiedenen Kreisen angehören, einen Kreis durch E_1, E_2 und E_3 (früher auf dem Kreise M_1 liegend). Dies geschieht durch Verbindung von E_1 mit E_3, Halbirung von E_1E_3 in L und Errichtung des Lothes LM auf E_1E_3 in L; dann ist M der Mittelpunkt dieses Kreises. Beschreibt man denselben mit ME_1, zieht $E_3F \parallel M_2M_1$, E_1E_2 in H schneidend, fällt $MK \perp E_3F$, verbindet M_1 mit F und zieht noch $KD \parallel FM_1$, so ist D der Punkt, in welchem die oben angedeutete Gerade G_1G_2 auf M_1M_2 senkrecht steht.

Das Stattfinden der Gl. (3) beweist man aus dieser Construction ganz wie früher; nach ihr ist also:

$$M_1M_2 \,.\, HF = (R_1 + R_2) \,.\, (R_1 - R_2).$$

Ferner ist: $HF = FK - HK = M_1D - HK = M_1D - M_1M$; ausserdem überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit folgender Gleichungen: $M_1D = FK$, $FK = E_3K$, $E_3K = M_2M$,
woraus sich ergiebt:

$$(5) \quad M_1D = M_2M \text{ oder } M_1M - M_2D.$$

Hierdurch verwandelt sich der obige Werth von HF in $M_1D - M_2D$ und die Einsetzung desselben in die Productengleichung bringt genau die Gl. (2) hervor, die selbst nur eine Umformung von (1) ist. Die Gl. (1) und in Folge dessen auch die Gl. (4) bestehen folglich für die eben construirte Gerade G_1G_2 bei zwei sich nicht schneidenden Kreisen M_1 und M_2 ebenfalls. Der gegebene Beweis weicht in Fig. 3. nur dadurch ab, dass die Centrale $M_1M_2 = M_1D - M_2D$, dagegen $HF = FK + HK$ ist.

Aus der eben vollendeten Betrachtung können wir übrigens eine einfachere Construction des Punktes D entnehmen; denn sobald M gefunden ist, darf nur noch $M_2D = M_1M$ gemacht werden.

Der Uebergang aus der Lage der Kreise in Fig. 1., wo sie sich schneiden, zu der in Fig. 2., wo sie ausser einander liegen, geschieht dadurch, dass wir den Kr. M_2 allmählich nach rechts fortrücken lassen; hierbei stellt sich als eine bemerkenswerthe Zwischenlage diejenige heraus, in welcher die Kreise sich (von aussen) berühren (vergl. Fig. 4.). Dann ist die gemeinschaftliche

Sekante in die gemeinschaftliche Tangente übergegangen, welche augenscheinlich die in Lehrsatz 1. und 2. ausgesprochenen Eigenschaften ebenfalls besitzt. Will man aber aus der Lage der Kreise in Fig. 1. zu der in Fig. 3., wo der Kr. M_2 innerhalb des Kr. M_1 liegt, übergehen, so muss man den Kr. M_2 nach links fortschieben und auch hier den Grenzfall überschreiten, in welchem die Kreise sich berühren (aber von innen). Auch alsdann ist die gemeinschaftliche Sekante in die Tangente verwandelt, wiederum mit Beibehaltung der schon oft erwähnten Eigenschaften.

Da folglich die Gerade $G_1 G_2$ bei allen nur möglichen Lagen der beiden Kreise M_1 und M_2 sich mit der in Lehrs. 2. niedergelegten Eigenschaft ausgestattet zeigt, so wollen wir ihr für alle Fälle den Namen erster Potenzort der beiden Kreise beilegen (Potenzlinie, Linie der gleichen Potenzen, Chordale, axe radical). Derselbe befindet sich, wie man leicht aus der Gl. (1) folgert, wenn die Kreise ausser einander liegen, zwischen denselben und zwar dem Mittelpunkt des kleineren, so wie der Peripherie des grösseren näher; wenn von den Kreisen aber einer vom andern eingeschlossen wird, ausserhalb derselben auf derjenigen Seite vom Mittelpunkt des grösseren, auf welcher der des kleineren sich befindet.

Wie bei zwei parallelen Geraden der Durchschnitt derselben dem Bereich des Endlichen entrückt ist, so fällt auch der erste Potenzort zweier Kreise in das Gebiet der Unendlichkeit, sobald ihre Peripherien parallel, d. h. die Kreise concentrisch sind. Dies zeigt auch unsere Construction, auf diesen Fall angewandt, dadurch an, dass sie verlangt, durch drei in einer Geraden liegende Punkte einen Kreis zu legen, als welcher nur die Gerade selbst angesehen werden kann. In der That, denken wir uns in Fig. 3. den Kreis M_2 nach links allmählig fortgerückt, bis sein Mittelpunkt mit M_1 zusammenfällt, so entfernt sich der erste Potenzort immer mehr, da $M_1 D - M_2 D$ immer kleiner, $M_1 D + M_2 D$ aber immer grösser wird. Im Moment des Zusammenfallens von M_2 mit M_1 ist $G_1 G_2$ im Unendlichen und erscheint, sobald M_2 noch über M_1 hinaus nach links weiter geht, auf der anderen Seite der Kreise wieder im Endlichen, wie denn ein solches Hinüberspringen eines Gebildes von einer Seite zur anderen stets durch die Unendlichkeit vermittelt wird.

Die in Lehrsatz 2. enthaltene Eigenschaft können wir jetzt so ausdrücken:

Lehrsatz 3. *Die Differenz der Quadrate der Verbindungsgeraden irgend eines Punktes auf dem ersten Potenzorte zweier Kreise mit den Mittelpunkten derselben ist gleich der Differenz der Quadrate der Radien.*

Wir wollen jetzt den bei der Construction des Punktes D in Fig. 2. und 3. benutzten Punkt M noch näher in Betracht ziehen. Setzt man nämlich die in (5) stehenden Werthe in Gleichung (1) ein, so ergiebt sich:

$$M_2M^2 - M_1M^2 = R_1^2 - R_2^2, \text{ oder auch:}$$

$$(6) \quad M_1M^2 - M_2M^2 = -(R_1^2 - R_2^2) = R_2^2 - R_1^2.$$

Errichtet man nun in Fig. 5. in M auf M_1M_2 eine Gerade g_1g_2 senkrecht, so wird man, wenn man einen beliebigen Punkt p derselben mit M_1 und M_2 verbindet, auf dieselbe Weise, wie oben von Gleichung (1) zu (4) fortgeschritten wurde, von (6) übergehen können zu:

$$(7) \quad pM_1^2 - pM_2^2 = -(R_1^2 - R_2^2) \text{ oder } pM_2^2 - pM_1^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Diese Gleichung ist der Gl. (3) ganz analog und enthält eine durch die Radien der Kreise M_1 und M_2 ausgedrückte Eigenschaft einer Geraden, welcher wir dieser Analogie wegen den Namen zweiter Potenzort der Kreise M_1 und M_2 geben (Linie äquidifferenter Potenzen in Grunert's Archiv Thl. XIX.). Vermöge dieser Feststellung erhalten wir:

Lehrsatz 4. *Die Differenz der Quadrate der Verbindungsgeraden irgend eines Punktes auf dem zweiten Potenzorte zweier Kreise mit den Mittelpunkten derselben ist gleich der negativen Differenz der Quadrate der Radien.*

Was die Lage dieser Geraden zu den Kreisen betrifft, so ist dieselbe in Fig. 5. Sekante des Kreises M_1; rückt man aber den Kr. M_2 aus seiner Lage nach rechts fort, so nähert sie sich der Peripherie des ersteren und wird Tangente an denselben, sobald der Abstand XY der nächsten Durchschnittspunkte der Peripherieen mit der Centrale den Werth

$$\sqrt{2R_1^2 - R_2^2} - R_2 \text{ annimmt.}$$

Denn liegt, wie in Fig. 6., M auf der Peripherie des Kreises M_1, so hat man $ME_1 = ME_3$, wenn E_1 und E_3 die frühere Bedeutung behalten; ferner ist: $MM_2^2 = E_3M^2 - E_3M_2^2$, also auch:

$$MM_2^2 = E_1M^2 - R_2^2,$$

d. h. weil $E_1M^2 = M_1M^2 + M_1E_1^2 = 2R_1^2$ ist,

$$MM_2^2 = 2R_1^2 - R_2^2.$$

Berücksichtigt man nun, dass $MY = MM_2 - YM_2 = MM_2 - R_2$ ist so ergiebt sich der obenstehende Werth:

$$(8) \quad MY = \sqrt{2R_1^2 - R_2^2} - R_2.$$

Beschreibt man daher über ME_3 einen Halbkreis, so ist die Sehne $MZ = E_3Z$ der Hälfte desselben dem Halbmesser R_1 gleich und man kann also, wenn der Kreis M_2 und der Punkt M gegeben ist, leicht den Halbmesser R_1 des Kreises M_1 finden; man darf nur $M_2E_3 \perp MM_2$ ziehen, M mit E_3 verbinden, über ME_3 einen Halbkreis beschreiben, denselben in Z halbiren und MZ ziehen, so ist MZ der gesuchte Halbmesser.

Rückt man den Kr. M_2 weiter nach rechts, so schneidet der zweite Potenzort den Kreis M_1 nicht mehr, sondern entfernt sich von ihm weiter und weiter (vergl. Fig. 7.).

Jetzt möge der Kr. M_2 aus seiner Lage in Fig. 5. nach links wandern; dasselbe thut dann auch der zweite Potenzort. Er geht durch den Mittelpunkt des Kr. M_1, sobald die gemeinschaftliche Sehne der nunmehr sich schneidenden Kreise den Mittelpunkt M_2 trifft (vergl. Fig. 8.); hierauf rückt er weiter nach links. Fallen endlich die Mittelpunkte der Kreise zusammen, so ist, wie der erste, auch der zweite Potenzort im Unendlichen verschwunden, beide jedoch auf verschiedenen Seiten. Bei einer gewissen Lage der Kreise ist vor seinem Verschwinden im Unendlichen der zweite Potenzort Tangente des Kreises M_1 im Punkte M (Fig. 9.) gewesen, nämlich damals, als das Stück MY wieder den in (8) enthaltenen Werth hatte, wie eine der oben mitgetheilten entsprechende Betrachtung an Fig. 9. sofort ergiebt.

Die gegenseitige Lage beider Potenzörter ist durch Gl. (5) festgestellt; diese Bestimmung lässt sich indess noch etwas anders ausdrücken..

Bezeichnet nämlich (Fig. 2.) O die Mitte von M_1M_2, so folgt aus (5), dass auch (9) $OM = OD$ sein muss.

Nennt man also D den Hauptpunkt des ersten und M den Hauptpunkt des zweiten Potenzortes, so hat man:

Lehrsatz 5. *Der Hauptpunkt des ersten Potenzortes ist vom Mittelpunkt des einen Kreises ebenso weit entfernt, als der Hauptpunkt des zweiten Potenzortes vom Mittelpunkt des anderen Kreises;* oder auch:

Die Hauptpunkte des ersten und zweiten Potenzortes sind vom Halbirungspunkt der Centrale gleich weit entfernt.

§. 2.

Eigenschaften der Potenzörter.

Von jedem Punkt auf dem ersten Potenzort zweier sich nicht schneidenden Kreise kann man an jeden derselben eine Tangente ziehen; bei zwei sich schneidenden Kreisen geht dies nicht an von den auf ihrer gemeinschaftlichen Sehne befindlichen Punkten aus. Sind nun (Fig. 1. 2. 3.) PT_1 und PT_2 zwei solche und man verbindet T_1 mit M_1 und T_2 mit M_2, so hat man:

$$PT_1^2 = M_1P^2 - M_1T_1^2 \text{ und } PT_2^2 = M_2P^2 - M_2T_2^2 \text{ oder:}$$
$$PT_1^2 = M_1P^2 - R_1^2 \text{ und}$$
$$M_2P^2 - R_2^2 = PT_2^2,$$

woraus durch Addition hervorgeht:

$$PT_1^2 + M_2P^2 - R_2^2 = PT_2^2 + M_1P^2 - R_1^2 \text{ oder}$$
$$PT_1^2 + R_1^2 - R_2^2 = PT_2^2 + M_1P^2 - M_2P^2.$$

Vermöge der Gl. (4) folgt aber hieraus, dass

$$PT_1^2 = PT_2^2 \text{ oder}$$
$$(10) \quad PT_1 = PT_2 \text{ ist, d. h.:}$$

Lehrsatz 6. *Jeder Punkt auf dem ersten Potenzorte zweier Kreise, von welchem sich überhaupt Tangenten an dieselben ziehen lassen, hat die Eigenschaft, dass die Tangenten von ihm an die Kreise gleich sind.*

Wir fragen hier, ob nicht etwas Aehnliches von den auf der gemeinschaftlichen Sehne zweier sich schneidenden Kreise liegenden Punkten gesagt werden kann. Ist beispielsweise P' in Fig. 10. ein solcher Punkt und man zieht $P'M_1$ und $P'M_2$, so besteht nach (4) die Gleichung: $M_1P'^2 - M_2P'^2 = R_1^2 - R_2^2$.

Errichtet man nun $P'S_1 \perp P'M_1$ und $P'S_2 \perp P'M_2$ und zieht S_1M_1, sowie S_2M_2, so hat man weiter:

$$P'S_1^2 = M_1S_1^2 - M_1P'^2 \text{ und } P'S_2^2 = M_2S_2^2 - M_2P'^2 \text{ oder}$$
$$P'S_1^2 = R_1^2 - M_1P'^2 \text{ und}$$
$$R_2^2 - M_2P'^2 = P'S_2^2.$$

Die Addition der beiden letzten Gleichungen giebt:

$$P'S_1^2 + R_2^2 - M_2P'^2 = P'S_2^2 + R_1^2 - M_1P'^2 \text{ oder}$$
$$P'S_1^2 + M_1P'^2 - M_2P'^2 = P'S_2^2 + R_1^2 - R_2^2,$$

woraus man mit Hülfe der vorher angeführten Relation schliesst, dass

$$P'S_1^2 = P'S_2^2 \text{ oder}$$
$$(11) \quad P'S_1 = P'S_2 \text{ ist.}$$

Die in dieser Gleichung stehenden Geraden sind aber offenbar die Hälften derjenigen Kreissehnen, auf welchen M_1P' und M_2P' senkrecht stehen, d. h. der kürzesten Sehnen, welche in jedem der Kreise M_1 und M_2 durch P' gezogen werden können; folglich lautet die dem Lehrsatz 6. analoge Eigenschaft:

Lehrsatz 7. *Jeder auf dem ersten Potenzorte zweier Kreise, die sich schneiden, innerhalb derselben liegende Punkt hat die Eigenschaft, dass die durch ihn gehenden kürzesten Sehnen beider Kreise gleich sind.*

Denkt man sich jetzt in Fig. 1. 2. 3. um P mit PT_1 einen Kreis beschrieben, so ist der Radius desselben Tangente an den Kr. M_1 und umgekehrt der Radius M_1T_1 des Kreises M_1 an den Kr. P; da man in diesem Falle von den beiden Kr. M_1 und P sagt, dass sie sich rechtwinklig schneiden und dieselbe Beziehung wegen $PT_2 = PT_1$ offenbar zwischen den Kreisen P und M_2 besteht, so erhält man:

Lehrsatz 8. *Jeder Punkt auf dem ersten Potenzorte zweier Kreise, ausserhalb derselben befindlich, ist Mittelpunkt eines Kreises, welcher die ersteren rechtwinklig schneidet.*

Ferner trifft ein Kreis, aus P' in Fig. 10. mit $P'S_1$ beschrieben, auf dem Kr. M_1 noch einen zweiten Punkt S' und auf dem Kr. M_2 einen Punkt S'' so, dass S_1S' und S_2S'' Durchmesser des Kreises P' sind. Weil man nun von zwei solchen Kreisen sagt, dass der eine M_1 oder M_2 den anderen P' im Durchmesser schneidet, so führt dies zu

Lehrsatz 9. *Jeder Punkt auf dem ersten Potenzorte zweier sich schneidenden Kreise, innerhalb derselben gelegen, ist Mittelpunkt eines Kreises, welcher von jedem der ersteren im Durchmesser geschnitten wird.*

Wir wollen jetzt die den eben vom ersten Potenzorte angeführten Eigenschaften entsprechenden für den zweiten Potenzort aufsuchen. Hat man in Fig. 11. auf die gewöhnliche Weise den Punkt M und somit g_1g_2 gefunden und beschreibt aus ihm den Kreis mit $ME_1 = ME_3$, so geht dieser auch durch die Punkte E_2 und E_4 auf den Verlängerungen der Radien M_1E_1 und M_2E_3. Dieser Kreis schneidet also die gegebenen M_1 und M_2 im Durchmesser. Trifft nun derselbe die Centrale M_1M_2 in C_1 und C_2 und man verbindet einen beliebigen Punkt p auf g_1g_2 mit C_1 und C_2, so ist $pC_1 = pC_2$, da $MC_1 = MC_2$ ist, und man kann daher aus p einen

durch C_1 und C_2 gehenden Kreis beschreiben; derselbe möge den Kreis M_1 in V_1 und V_2 schneiden. Dann hat man, wenn p und M_1 mit V_1 und V_2 verbunden werden:

$$pV_1 = pC_1,$$
$$pC_1^2 = Mp^2 + MC_1^2, \quad MC_1 = ME_1 \text{ und}$$
$$ME_1^2 = M_1E_1^2 + M_1M^2 = M_1M^2 + R_1^2,$$

woraus durch Substitution sich ergiebt:

$$pV_1^2 = Mp^2 + M_1M^2 + R_1^2, \text{ d. h. weil}$$
$$Mp^2 = M_1p^2 - M_1M^2 \text{ ist},$$
$$pV_1^2 = M_1p^2 + R_1^2 = M_1p^2 + M_1V_1^2.$$

Die letzte Beziehung lehrt, dass $\angle pM_1V_1$ ein rechter Winkel ist, und da dasselbe ebenso von $\angle pM_1V_2$ sich zeigen lässt, so erhellt, dass $V_1M_1V_2$ eine Gerade, also V_1V_2 ein Durchmesser des Kreises M_1 ist. Weil aber in Bezug auf den Kreis M_2 offenbar derselbe Beweis geführt werden kann, so folgt hieraus:

Lehrsatz 10. *Jeder Punkt auf dem zweiten Potenzorte zweier Kreise ist Mittelpunkt eines Kreises, welcher jene im Durchmesser schneidet.*

Ohne Schwierigkeit kann man nachweisen, dass die in den Lehrsätzen 3—10 ausgesprochenen Eigenschaften von keinem anderen Punkte ausserhalb des jedesmaligen Potenzortes getheilt werden; deshalb müssen auch die Umkehrungen jener Sätze richtig sein. Wir heben von solchen nur folgende hervor:

Lehrsatz 11. *Hat ein Punkt in Bezug auf zwei Kreise die Eigenschaft, dass sich aus ihm ein Kreis beschreiben lässt, welcher die gegebenen entweder rechtwinklig schneidet, oder von ihnen im Durchmesser geschnitten wird, so liegt er auf dem ersten Potenzorte der beiden Kreise* (Umkehrung von Lehrsatz 8. und 9.).

Lehrsatz 12. *Hat ein Punkt in Bezug auf zwei Kreise die Eigenschaft, dass sich aus ihm ein Kreis beschreiben lässt, welcher die gegebenen im Durchmesser schneidet, so liegt er auf dem zweiten Potenzorte der gegebenen Kreise* (Umkehrung von Lehrs. 10.).

Denkt man sich nun mehrere Kreise P_1, P_2, P_3 u. s. w. beschrieben, welche die Kr. M_1 und M_2 rechtwinklig schneiden, aus Punkten des ersten Potenzortes der letzteren, so schneidet umgekehrt auch der Kreis M_1 alle Kreise P_1, P_2, P_3 u. s. w. rechtwinklig und liegt folglich nach Lehrsatz 11. auf dem ersten Potenzorte der Kreise P_1, P_2, P_3 u. s. w. Dasselbe gilt von M_2; mithin

haben die rechtwinklig schneidenden Kreise P_1, P_2, P_3 u. s. w. die beliebig verlängerte Centrale M_1M_2 zum ersten Potenzorte. Also:

Lehrsatz 13. *Schneiden mehrere Kreise zwei andere rechtwinklig, so haben sie eine und dieselbe Gerade zum ersten Potenzorte, welche durch Verlängerung der Centrale der geschnittenen Kreise sich ergiebt; schneiden sich zwei der rechtwinklig schneidenden Kreise, so gehen alle übrigen dieser Kreise ebenfalls durch diese Schnittpunkte.*

Denkt man sich aber aus Punkten des ersten Potenzortes zweier sich schneidenden Kreise M_1 und M_2 solche Kreise P', P'', P''' u. s. w. gezogen, welche von den ersten im Durchmesser geschnitten werden, so liegt M_1, weil der Kreis M_1 alle Kreise P', P'', P''' u. s. w. im Durchmesser schneidet, auf dem zweiten Potenzorte der Kreise P', P'', P''' u. s. w. und, da dasselbe von M_2 gesagt werden kann, so folgt:

Lehrsatz 14. *Werden mehrere Kreise von zwei anderen im Durchmesser geschnitten, so haben sie eine und dieselbe Gerade zum zweiten Potenzort, nämlich die (beliebig verlängerte) Centrale der beiden schneidenden Kreise.*

Hat man (Fig. 12.) aus P_1 auf dem ersten Potenzorte der in B_1 und B_2 sich schneidenden Kreise M_1 und M_2 mit der Tangente P_1T_1 einen rechtwinklig schneidenden Kreis beschrieben, ferner aus P' auf derselben Geraden G_1G_2 mit der halben kleinsten Sehne $P'S_1$ einen im Durchmesser geschnittenen Kreis und endlich aus einem beliebigen Punkt m auf M_1M_2 einen Kreis durch B_1 und B_2 gezogen, so hat e r s t e n s der Kr. M_1 mit m denselben ersten Potenzort G_1G_2, wie M_1 mit M_2, und z w e i t e n s bleiben die Radien P_1T_1 und $P'S_1$ der Kreise P_1 und P' unverändert, wenn man für M_2 den Kreis m substituirt. Folglich schneidet der Kreis m den Kreis P_1 rechtwinklig und den Kreis P' im Durchmesser; dabei haben alle Kreise P_1, P_2, P_3 u. s. w. die Gerade M_1M_2 zum ersten, alle Kreise P', P'', P''' u. s. w. dieselbe zum zweiten Potenzort. Daraus ergiebt sich folgender

Lehrsatz 15. *Hat man zwei Kreisreihen und eine Gerade, welche in Bezug auf die erste Kreisreihe erster und in Bezug auf die zweite zweiter Potenzort ist, und beschreibt einen Kreis aus einem Punkt dieser Geraden entweder mit der Tangente an einen Kreis der ersten Reihe, oder mit derjenigen Länge, die man erhält, wenn man den Punkt mit dem Mittelpunkt eines Kreises der zweiten Reihe verbindet, auf dieser Verbindungsgeraden in diesem Kreise einen*

senkrechten Durchmesser zieht und einen Endpunkt desselben mit dem Punkt der Geraden verbindet, so schneidet dieser Kreis alle Kreise der ersten Reihe rechtwinklig, alle Kreise der zweiten Reihe hingegen im Durchmesser.

§. 3.

Die Potenzpunkte.

Wenn drei Kreise M_1, M_2, M_3 gegeben sind, so gehören zu jedem Paare, welches man aus ihnen bilden kann, zwei Potenzörter; wir bezeichnen die beiden zu den Kreisen M_1 und M_2 gehörigen durch I und 1, so dass I der erste und 1 der zweite ist, ebenso die zu den Kreisen M_1 und M_3 gehörigen durch II und 2 und die der Kreise M_2 und M_3 durch III und 3.

Liegen nun die drei Mittelpunkte nicht in einer einzigen Geraden, so müssen die Potenzörter Durchschnitte mit einander bilden; nennt man P den von I mit II, so hat man nach Gl. (4), wenn R_3 den Radius des Kr. M_3 bezeichnet:

$$M_1P^2 - M_2P^2 = R_1^2 - R_2^2, \text{ weil } P \text{ auf I liegt, und}$$
$$M_1P^2 - M_3P^2 = R_1^2 - R_3^2, \text{ weil } P \text{ auf II liegt.}$$

Hieraus folgt aber durch Subtraction der ersten von der zweiten Gleichung:

$$M_2P^2 - M_3P^2 = R_2^2 - R_3^2.$$

Das Stattfinden dieser Relation lässt nach der Umkehrung von Lehrs. 3. schliessen, dass P sich auch auf III, dem ersten Potenzorte der Kr. M_2 und M_3, befinden muss. Da nun auf dieselbe Weise gezeigt werden kann, dass die Potenzörter 1, 2, 3 sich ebenfalls in demselben Punkte p schneiden, so hat man:

Lehrsatz 16. *Sowohl die drei ersten, als auch die drei zweiten Potenzörter dreier Kreise schneiden sich in einem und demselben Punkte.*

Wir nennen diesen Punkt für die ersten Potenzörter den ersten Potenzpunkt (bei Anderen Potenzpunkt, Chordalpunkt) der drei Kreise. Er kann innerhalb und ausserhalb liegen, wenn sich die Kreise schneiden, liegt hingegen stets ausserhalb, wenn nur zwei der Kreise sich nicht schneiden.

Aus Lehrs. 8. und 9. folgt nun sofort:

Lehrsatz 17. *Der erste Potenzpunkt dreier Kreise ist Mittelpunkt eines Kreises, welcher entweder alle drei rechtwinklig schnei-*

det, oder von allen dreien im Durchmesser geschnitten wird, je nachdem er ausserhalb oder innerhalb der Kreise liegt.

Dieser Satz giebt ein Mittel an die Hand, den ersten Potenzort zweier Kreise, welche sich nicht schneiden, durch gemeinschaftliche Sekanten zu construiren; wäre derselbe etwa für die Kr. M_1 und M_2 in Fig. 14. zu bestimmen, so darf man nur beide mittelst eines Kreises M_3 schneiden und den Durchschnitt P der Sekanten B_1B_2 und B_3B_4 construiren, ferner die Kr. M_1 und M_2 durch einen Kr. M' schneiden und P' durch $B_1'B_2'$ und $B'_3B'_4$ bestimmen; dann muss sowohl P, als auch P' auf dem ersten Potenzorte der Kr. M_1 und M_2 liegen, dieser selbst also durch Verbindung von P mit P' gefunden werden.

Nennt man p den zweiten Potenzpunkt der Kr. M_1, M_2, M_3, so folgt für ihn aus Lehrs. 10:

Lehrsatz 18. *Der zweite Potenzpunkt dreier Kreise ist Mittelpunkt eines Kreises, welcher jene im Durchmesser schneidet.*

Ausserdem schneiden sich die sechs Potenzörter der drei Kreise noch in sechs Punkten, deren jeden wir vermöge der Geraden, welche sich in ihm treffen, bezeichnen. Man sieht nun aus Fig. 13. sofort, dass die Punkte (I,2), P, (1, II), p; ferner (I, 3), P, (1, III), p; endlich (II, 3), P, (2, III), p jedesmal die Ecken eines Parallelogramms bilden; weil diese Parallelogramme aber eine gemeinschaftliche Diagonale Pp haben, so kreuzen sich die drei übrigen Diagonalen in dem Halbirungspunkte dieser, so dass also die durch die Punkte (I, 2) und (1, II),
(I, 3) und (1, III),
(II, 3) und (2, III)
gehenden Geraden sich in der Mitte von Pp schneiden. Zugleich sieht man ein, dass der Durchschnitt dieser Geraden der Mittelpunkt desjenigen Kreises ist, welcher durch die Punkte M_1, M_2, M_3 sich legen lässt, wenn man bedenkt, dass die Potenzörter auf den Centralen senkrecht stehen und zwei zu einer Centrale gehörige von deren Halbirungspunkte gleichweit entfernt sind (Lehrs. 5.). Hieraus ergiebt sich

Lehrsatz 19. *Die beiden Potenzpunkte dreier Kreise liegen mit dem Mittelpunkte des durch die Mittelpunkte der gegebenen Kreise gehenden Kreises in einer und derselben Geraden und zwar so, dass der erwähnte Mittelpunkt die Entfernung der Potenzpunkte halbirt.*

§. 4.

Die Berührungskreise zweier gegebenen Kreise.

Wir wollen von dem Punkte P in Fig. 15., welcher auf dem ersten Potenzorte $G_1 G_2$ der Kreise M_1 und M_2 liegt, an diese die Tangenten PT_1 und PT_2 ziehen, M_1 mit T_1, sowie M_2 mit T_2 verbinden, ferner $M_1 T_1$ mit $M_2 T_2$ zum Durchschnitt bringen, und den Punkt m_1, welchen wir auf diese Weise erhalten, mit P verbinden. Dann ist $PT_1 = PT_2$ (Lehrs. 6.), $Pm_1 = Pm_1$ und $\angle PT_1 m_1 = \angle PT_2 m_1$ als rechte Winkel, folglich $\triangle PT_1 m_1 \cong \triangle PT_2 m_1$ und deshalb $m_1 T_1 = m_1 T_2$; mithin kann man aus m_1 einen Kreis mit $m_1 T_1$ beschreiben, welcher den Kreis M_1 in T_1 und M_2 in T_2 berührt. Also:

Lehrsatz 20. *Der Durchschnitt der Radien, welche die Mittelpunkte zweier Kreise mit den Berührungspunkten zweier von einem Punkte auf dem ersten Potenzorte der Kreise nach denselben gezogenen Tangenten verbinden, ist Mittelpunkt eines Kreises, welcher jeden der ersteren berührt.*

Zwei Kreise können nun von einem dritten erstens beide von aussen, oder beide von innen, oder zweitens der eine von aussen und der andere von innen berührt werden; im ersten Falle berührt der dritte Kreis die beiden anderen gleichartig, im anderen ungleichartig. So berührt in Fig. 15. der Kreis m die beiden Kreise M_1 und M_2 von aussen, m_1 beide von innen, m_2 hingegen den Kreis M_1 von aussen, M_2 von innen, m_3 endlich den Kreis M_1 von innen und M_2 von aussen; daher berühren die Kreise m und m_1 die gegebenen gleichartig, m_2 und m_3 aber ungleichartig. Immer aber besteht der

Lehrsatz 21. *Wenn ein Kreis zwei andere berührt, so treffen sich die gemeinschaftlichen Tangenten, welche er mit ihnen bildet, auf ihrem ersten Potenzorte* (vergl. Lehrs. 16.).

§. 5.

Die Aehnlichkeitspunkte.

Ist P in Fig. 16. ein Punkt auf dem ersten Potenzorte $G_1 G_2$ der Kreise M_1 und M_2, so lässt sich aus ihm mit $PT_1 = PT_2$ ein rechtwinklig schneidender Kreis beschreiben (Lehrs. 8.); die Sehne

T_1T_2 desselben möge die Centrale M_1M_2 in A treffen. Verbindet man M_1 mit T_1 und M_2 mit T_2, so ist

$$\angle M_1T_1P = \angle M_2T_2P \text{ als Rechte und } \angle T_2T_1P = \angle T_1T_2P,$$
$$\text{da } PT_1 = PT_2.$$

Hieraus folgt durch Subtraction, dass auch $\angle M_1T_1T_2 = \angle M_2T_2T_1$ sein muss; schneidet nun T_1T_2 die Kreise M_1 und M_2 zum zweiten Male in U_1 und U_2, so hat man weiter, wenn M_1U_1 und M_2U_2 gezogen werden:

$$\angle M_1T_1U_1 = \angle M_1U_1T_1 \text{ und } \angle M_2T_2U_2 = \angle M_2U_2T_2,$$

wodurch man wegen der eben bewiesenen Gleichheit erhält:

$$\angle M_1U_1T_1 = \angle M_2T_2T_1 \text{ und}$$
$$\angle M_1T_1T_2 = \angle M_2U_2T_2.$$

Folglich ist $M_1U_1 \parallel M_2T_2$ und $M_1T_1 \parallel M_2U_2$, weshalb der Punkt A auch mittelst paralleler Radien sich bestimmen lässt. Man bekommt nämlich durch jeden rechtwinklig schneidenden Kreis denselben Punkt A auf der Centrale, da sich verhält:

$$(12)\quad M_1A : M_2A = M_1T_1 : M_2U_2 \text{ d. h. } = R_1 : R_2$$

und diese Proportion von den Bestimmungselementen des rechtwinklig schneidenden Kreises ganz unabhängig ist. Namentlich gilt dies auch von den andern Durchschnitten T_1' und T_2' des Kreises P mit den Kreisen M_1 und M_2, deren Verbindungsgerade also ebenfalls durch A geht. Erinnert man sich nun aus §. 4., dass in T_1 und T_2, so wie in T_1' und T_2' ein Kreis die gegebenen M_1 und M_2 gleichartig berühren kann, so lässt sich das Vorige fassen in den

Lehrsatz 22. *Die Berührungssehnen aller Kreise, welche dieselben beiden gleichartig berühren, treffen sämmtlich in einem Punkte der Centrale der gegebenen Kreise zusammen; die Abstände dieses Punktes von den gegebenen Mittelpunkten stehen im Verhältniss der gegebenen Radien; in demselben schneiden sich auch die Verbindungsgeraden der Endpunkte gleich gerichteter paralleler Radien der gegebenen Kreise.*

Man hat den Punkt A den äusseren Aehnlichkeitspunkt der Kreise M_1 und M_2 genannt; durch denselben müssen offenbar auch die äusseren gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise M_1 und M_2 gehen, da die zu ihnen gehörigen Radien parallel sind.

In ähnlicher Weise, wie vorhin, hat man:

$$\angle PT_1M_1 = \angle PT_2'M_2 = R \text{ oder}$$
$$\angle PT_1M_1 = \angle PT_2'T_1 + \angle M_2T_2'V_2,$$

wenn V_2 den zweiten Durchschnitt von T_1T_2' mit M_2 bezeichnet; subtrahirt man hiervon:

$$\angle PT_1T_2' = \angle PT_2'T_1, \text{ so kommt:}$$
$$\angle M_1T_1T_2' = \angle M_2T_2'V_2.$$

Dabei ist ferner, wenn man V_1, den zweiten Durchschnitt von T_1T_2' mit dem Kreise M_1 nennt:

$$\angle M_1T_1V_1 = \angle M_1V_1T_1 \text{ und}$$
$$\angle M_2T_2'V_2 = \angle M_2V_2T_1, \text{ folglich auch:}$$
$$\angle M_1V_1T_1 = \angle M_2T_2'V_2 \text{ oder } \angle M_1V_1T_2' = \angle M_2T_2'V_1 \text{ und}$$
$$\angle M_1T_1T_2' = \angle M_2V_2T_1.$$

Diese Winkelbeziehungen lehren, dass $M_1V_1 \parallel M_2T_2'$ und $M_1T_1 \parallel M_2V_2$ ist. Trifft jetzt T_1T_2' die Centrale M_1M_2 in J, so verhält sich:

$$(13)\ M_1J : M_2J = M_1V_1 : M_2T_2' = R_1 : R_2.$$

Folglich werden sich in J alle solche Gerade, wie T_1T_2' kreuzen. Weil aber in T_1T_2' die Kreise M_1 und M_2 ungleichartig berührt werden können, so hat man

Lehrsatz 23. *Die Berührungssehnen aller Kreise, welche dieselben beiden ungleichartig berühren, schneiden sich sämmtlich in demselben Punkt der Centrale der gegebenen Kreise; die Entfernungen dieses Punktes von den gegebenen Mittelpunkten verhalten sich wie die gegebenen Radien; in demselben treffen auch die Verbindungsgeraden der Endpunkte entgegen gerichteter paralleler Radien der gegebenen Kreise zusammen.* (Construction des Punktes durch solche Radien.)

Den Punkt J nennt man den inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise M_1 und M_2; in demselben müssen sich offenbar auch die inneren gemeinschaftlichen Tangenten der Kreise M_1 und M_2 begegnen, da die zu ihnen gehörigen Radien die im Lehrs. 23. angegebene Beschaffenheit besitzen.

Durch Umkehrung ergiebt sich aus Lehrs. 22. und 23.:

Lehrsatz 24. *Zieht man durch den äusseren (inneren) Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise eine Transversale durch dieselben, so kann in den Durchschnitten der Transversale, welche nicht zu parallelen Radien gehören, ein Kreis die gegebenen gleichartig (ungleichartig) berühren.*

Rückt man den Mittelpunkt des Kreises M_2 allmählig nach links fort, so überzeugt man sich von der Lage der Aehnlichkeitspunkte bei verschiedenen Lagen der Kreise. Während bei ausser

einander liegenden Kreisen der innere Aehnlichkeitspunkt zwischen denselben, der äussere ausserhalb auf der Seite des kleineren Kreises sich befand, so fällt der innere bei äusserer Berührung, sowie der äussere bei innerer Berührung der Kreise in den Berührungspunkt und bei ganz in einander liegenden Kreisen befinden sich beide Aehnlichkeitspunkte innerhalb derselben.

§. 6.

Die Aehnlichkeitsgeraden.

Bei drei Kreisen M_1, M_2, M_3 in Fig. 17. giebt es drei äussere und drei innere Aehnlichkeitspunkte; heissen die Radien der Kreise R_1, R_2, R_3, die äusseren Aehnlichkeitspunkte A_1, A_2, A_3 und die inneren I_1, I_2, I_3, so dass A_1 und I_1 zu den Kreisen M_1 und M_2, A_2 und I_2 zu M_1 und M_3, endlich A_3 und I_3 zu M_2 und M_3 gehören, so ist:

$$\left.\begin{array}{ll} (14) & M_1A_1 : M_2A_1 = R_1 : R_2 \\ (15) & M_3A_2 : M_1A_2 = R_3 : R_1 \\ (16) & M_2A_3 : M_3A_3 = R_2 : R_3 \end{array}\right\} \text{nach Lehrs. 13.}$$

Hieraus folgt durch Zusammensetzung:

$$(17)\quad M_1A_1 \,.\, M_3A_2 \,.\, M_2A_3 = M_2A_1 \,.\, M_1A_2 \,.\, M_3A_3.$$

Nimmt man nun an, dass M_2M_3 die Verbindungsgerade von A_1 mit A_2 in A' schneidet, und zieht $M_1N \parallel M_2M_3$, so verhält sich

$$M_1N : M_2A' = M_1A_1 : M_2A_1 \text{ und}$$
$$M_3A' : M_1N = M_3A_2 : M_1A_2.$$

Diese Proportionen liefern zusammengesetzt die neue:

$$M_3A' : M_2A' = M_1A_1 \,.\, M_3A_2 : M_2A_1 \,.\, M_1A_2$$

und daraus ergiebt sich:

$$(18)\quad M_1A_1 \,.\, M_3A_2 \,.\, M_2A' = M_2A_1 \,.\, M_1A_2 \,.\, M_3A'.$$

Die Verbindung von Gl. (17) und (18) führt jetzt zu der Proportion:

$$M_2A_3 : M_2A' = M_3A_3 : M_3A' \text{ oder}$$
$$A'A_3 : M_2A_3 = A'A_3 : M_3A_3,$$

welche nur bestehen kann entweder bei der Gleichheit von M_2A_3 und M_3A_3 oder so, dass $A'A_3$ der Null gleich ist; weil aber das Erstere nicht stattfindet, sobald M_2 von M_3 verschieden ist, wie wir voraussetzen, so muss das Letztere der Fall sein, d. h. A' muss mit A_3 zusammenfallen. Hierdurch haben wir bewiesen, dass A_1,

A_2 und A_3 einer einzigen Geraden angehören, eine Eigenschaft, die als Ergebniss der Beziehung (17) erscheint*). Nun hat man nach Lehrs. 23. noch folgende Proportionen:

$$(19)\ M_1I_1 : M_2I_1 = R_1 : R_2,$$
$$(20)\ M_3I_2 : M_1I_2 = R_3 : R_1 \text{ und}$$
$$(21)\ M_2I_3 : M_3I_3 = R_2 : R_3.$$

Durch Zusammensetzung folgt aus Prop. (14), (20), (21), aus (15), (19), (21) und aus (16), (19), (20):

$$(22)\ M_1A_1 \,.\, M_3I_2 \,.\, M_2I_3 = M_2A_1 \,.\, M_1I_2 \,.\, M_3I_3,$$
$$(23)\ M_3A_2 \,.\, M_1I_1 \,.\, M_2I_3 = M_1A_2 \,.\, M_2I_1 \,.\, M_3I_3 \text{ und}$$
$$(24)\ M_2A_3 \,.\, M_1I_1 \,.\, M_3I_2 = M_3A_3 \,.\, M_2I_1 \,.\, M_1I_2,$$

woraus man ganz wie oben schliessen kann, dass A_1, I_2, I_3, ferner A_2, I_1, I_3 und A_3, I_1, I_2 auf je einer Geraden liegen müssen. Also:

Lehrsatz 25. *Von den sechs Aehnlichkeitspunkten dreier Kreise liegen viermal drei in einer Geraden, nämlich erstens die drei äusseren und ausserdem der äussere irgend zweier Kreise mit den beiden inneren, welche der dritte Kreis mit ihnen bildet.*

Man nennt die vorstehend bezeichneten Geraden die vier Aehnlichkeitsgeraden der Kreise M_1, M_2, M_3 und zwar die durch die äusseren Aehnlichkeitspunkte gehende die äussere, die drei übrigen die inneren; letztere kann man wieder dadurch unterscheiden, dass man die eine als die innere Aehnlichkeitsgerade des äusseren Aehnlichkeitspunktes der Kreise M_1 und M_2 u. s. f. bezeichnet.

Setzt man die Proportionen (19), (20) und (21) zusammen, so entsteht die Gleichung:

$$(25)\ M_1I_1 \,.\, M_3I_2 \,.\, M_2I_3 = M_2I_1 \,.\, M_1I_2 \,.\, M_3I_3.$$

Wenn man nun den Durchschnitt von I_1M_3 und I_2M_2 mit W_1 bezeichnet, durch M_1 eine Parallele mit M_2M_3 zieht, M_3I_1 in X und M_2I_2 in Y schneidend, und den Durchschnitt von M_1W_1 mit M_3M_2 vorläufig I' nennt, so finden folgende Proportionen Statt:

*) Die obige Betrachtung enthält den Beweis für die Umkehrung des allgemeinen Satzes aus der Transversalentheorie: Eine Gerade, welche die drei Seiten eines Dreiecks schneidet, bestimmt auf diesen sechs solche Abschnitte, dass das Product aus drei solchen, welche keinen Endpunkt gemein haben, gleich ist dem Producte aus den drei übrigen Abschnitten (Menelaus um 80 n. Chr.).

$$M_1I_1 : M_2I_1 = M_1X : M_3M_2,$$
$$M_1I_2 : M_1I_2 = M_3M_2 : M_1Y,$$
$$M_2I' : W_1I' = M_1Y : M_1W_1 \text{ und}$$
$$W_1I' : M_3I' = M_1W_1 : M_1X.$$

Aus diesen leitet man durch Zusammensetzung ab:

$$(26)\quad M_1I_1 \,.\, M_3I_2 \,.\, M_2I' = M_2I_1 \,.\, M_1I_2 \,.\, M_3I'$$

und aus (25) und (26) folgt jetzt die Proportion:

$$M_2I_3 : M_2I' = M_3I_3 : M_3I',$$

die offenbar falsch ist, da $M_3I_3 < M_3I'$ sein muss, während $M_2I_3 > M_2I'$ ist, so lange I' von I_3 verschieden gedacht wird, sich aber als richtig erweist, wenn I' nach I_3 fällt. Hiermit hat man also den Beweis dafür geliefert, dass die Verbindungsgeraden M_1I_3, M_2I_2 und M_3I_1 sich in dem nämlichen Punkte W_1 kreuzen, was als eine Folge der Relation (25) erscheint.*)

Da nun durch Zusammensetzung ferner aus (14), (15), (21), sodann aus (14), (16), (20) und endlich aus (15), (16), (19) die Beziehungen:

$$(27)\quad M_1A_1 \,.\, M_3A_2 \,.\, M_2I_3 = M_2A_1 \,.\, M_1A_2 \,.\, M_3I_3,$$
$$(28)\quad M_1A_1 \,.\, M_2A_3 \,.\, M_3I_2 = M_2A_1 \,.\, M_3A_3 \,.\, M_1I_2 \text{ und}$$
$$(29)\quad M_3A_2 \,.\, M_2A_3 \,.\, M_1I_1 = M_1A_2 \,.\, M_3A_3 \,.\, M_2I_1$$

sich ableiten lassen, so ergiebt sich auf dieselbe Weise, dass M_1I_3, M_2A_2, M_3A_1, zweitens M_1A_3, M_2I_2, M_3A_1 und M_1A_3, M_2A_2, M_3I_1 sich in je einem Punkte durchschneiden werden. Also:

Lehrsatz 26. *Von den sechs Verbindungsgeraden, deren jede einen der sechs Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise mit dem nicht zu ihm gehörigen Mittelpunkte verbindet, durchschneiden sich viermal drei in einem Punkte, nämlich die der drei inneren Aehnlichkeitspunkte und die des inneren irgend zweier Kreise mit denen derjenigen beiden äusseren, welche der dritte Kreis mit ihnen bildet.*

---

*) Das Obige bildet den Beweis für die Umkehrung des allgemeinen Satzes: Zieht man von den Ecken eines Dreiecks nach einem beliebigen Punkte drei Gerade, so bestimmen diese mittelst ihrer Durchschnitte mit den Dreiecksseiten auf diesen sechs solche Abschnitte, dass das Product aus drei solchen, welche keinen Endpunkt gemein haben, gleich ist dem Producte aus den drei übrigen Abschnitten (Johann Bernoulli 1667—1748).

§. 7.

Die Transversalen durch die Aehnlichkeitspunkte und die Potenzkreise.

Ist A in Fig. 18. der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise M_1 und M_2 und man zieht die Transversale AT_1, auf welcher noch die Durchschnitte T_2, t_1, t_2 liegen, so weiss man, da $M_1T_1 \parallel M_2t_2$ und $M_1t_1 \parallel M_2T_2$ ist, dass sich verhält:

$$AT_1 : At_2 = R_1 : R_2 \text{ und}$$
$$AT_2 : At_1 = R_2 : R_1,$$

woraus man folgert:

$$(30) \quad AT_1 . AT_2 = At_1 . At_2.$$

In gleicher Weise wird man bei einer zweiten Transversale AT_1', welche die Kreise noch in T_2', t_1', t_2' trifft, haben:

$$(31) \quad AT_1' . AT_2' = At_1' . At_2'.$$

Nun bestehen aber nach einem bekannten Satze der Kreislehre die Beziehungen:

$$AT_1 . At_1 = AT_1' . At_1' \text{ und}$$
$$At_2 . AT_2 = At_2' . AT_2',$$

deren Multiplication giebt:

$$AT_1 . AT_2 . At_1 . At_2 = AT_1' . AT_2' . At_1' . At_2'.$$

Setzt man hierin die Werthe aus (30) und (31) ein, so ergiebt sich:

$$AT_1^2 . AT_2^2 = AT_1'^2 . AT_2'^2 \text{ oder}$$
$$(32) \quad AT_1 . AT_2 = AT_1' . AT_2'.$$

Auf gleiche Weise ist:

$$(33) \quad At_1 . At_2 = At_1' . At_2'.$$

Aus (30) und (32) folgt noch:

$$(34) \quad At_1 . Ai_2 = AT_1' . AT_2'.$$

und aus (30) und (33):

$$(35) \quad AT_1 . AT_2 = At_1' . At_2'.$$

Da offenbar das Gesagte auch auf den inneren Aehnlichkeitspunkt Anwendung findet, so lassen sich die in den Gleichungen (30) bis (33) enthaltenen Wahrheiten folgendermassen in Worte fassen:

Lehrsatz 27. *Eine durch den (äusseren oder inneren) Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise gezogene Transversale wird durch diese so getheilt, dass das Product derjenigen beiden Abschnitte, welche zwischen dem Aehnlichkeitspunkt und zwei zu verschiedenen Kreisen, aber nicht zu parallelen Radien gehörigen Durchschnittspunkten lie-*

gen, gleich dem Product der beiden anderen ist. Die bezeichneten Producte haben bei allen durch denselben Aehnlichkeitspunkt gezogenen Transversalen denselben Werth. Diesen constanten Werth hat auch das Product der Tangenten vom jedesmaligen Aehnlichkeitspunkt an die Kreise (vorausgesetzt, dass sich solche ziehen lassen).

Aus der Gleichung (32) folgt ferner, dass T_1, T_2, T_1', T_2', aus (33), dass t_1, t_2, t_1', t_2', aus (34), dass t_1, t_2, T_1', T_2' und aus (35), dass T_1, T_2, t_1', t_2' je in einem Kreise liegen; der erste dieser Kreise bildet mit dem Kreise M_1 die Sehne T_1T_1' und mit M_2 die Sehne T_2T_2', welche als erste Potenzörter aufgefasst sich auf dem ersten Potenzorte der Kreise M_1 und M_2 schneiden müssen (Lehrs. 16.). Ebenso müssen sich auch t_1t_1' und t_2t_2', ferner t_1T_1' und t_2T_2', endlich T_1t_1' und T_2t_2' auf dem ersten Potenzorte der Kreise, deren Aehnlichkeitspunkt A ist, durchkreuzen und man hat also, da für den inneren Aehnlichkeitspunkt Analoges gilt, den

Lehrsatz 28. *Zieht man durch einen der beiden Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise zwei Transversalen und verbindet zwei nicht zu einem Kreise und nicht zu parallelen Radien gehörige Durchschnittspunkte der einen mit zwei solchen der anderen durch Sehnen der gegebenen Kreise, so treffen sich diese (nöthigenfalls verlängert) auf dem ersten Potenzorte der Kreise.*

Durch Umkehrung folgt hieraus:

Lehrsatz 29. *Verbindet man einen Punkt auf dem ersten Potenzorte zweier Kreise mit zwei nicht zu demselben Kreise und nicht zu parallelen Radien gehörigen Durchschnittspunkten einer durch einen der Aehnlichkeitspunkte gezogenen Transversale mit den Kreisen, so bestimmen die Verbindungsgeraden auf den Kreisen zwei neue Durchschnittspunkte, welche mit dem Aehnlichkeitspunkt in einer Geraden sich befinden.*

Da der äussere Aehnlichkeitspunkt A (Fig 16.) der Kreise M_1 und M_2 die Eigenschaft hat, dass das Product $AT_1 . AT_2$ einen constanten Werth besitzt, so wollen wir diesen uns in ein Quadrat verwandeln, oder zwischen AT_1 und AT_2 die mittlere Proportionale, durch $R(A)$ bezeichnet, bestimmen. Den aus A mit $R(A)$ beschriebenen Kreis nennen wir den ä u s s e r e n P o t e n z k r e i s der Kreise M_1 und M_2. Entsprechend legen wir dem mit $R(I)$, der mittleren Proportionale zwischen IT_1 und IT_2' aus I beschriebenen Kreise den Namen i n n e r e r P o t e n z k r e i s der Kreise M_1 und M_2 bei. Weil nun in T_1 und T_2 der Kreis P die

gegebenen (rechtwinklig) schneidet, so ist die Tangente von A an diesen mittlere Proportionale zwischen AT_1 und AT_2, d. h. gleich $R(A)$, mithin schneidet der Potenzkreis A den Kreis P rechtwinklig; folglich schneiden hier die drei Kreise A, M_1, M_2 den Kreis P rechtwinklig. Da dies aber von jedem die beiden gegebenen rechtwinklig schneidenden Kreise gilt, so haben die drei Kreise A, M_1, M_2 die Gerade G_1G_2 zum gemeinschaftlichen ersten Potenzort (Lehrs. 13.).

Will man das Product $IT_1 . IT_2'$ in Bezug auf den Kreis P in ein Quadrat verwandeln, so muss man die durch I gehende kleinste Sehne des Kreises P construiren, weil I innerhalb des Kreises P liegt. Daraus folgt, dass in diesem Falle der innere Potenzkreis, der mit der Hälfte dieser kleinsten Sehne zu beschreiben ist, von dem Kreise P im Durchmesser geschnitten wird.

Das eben Gesagte gilt für die Lage der Kreise, wie sie in Fig. 16. ist. Untersucht man die Sache bei anderen Lagen, so findet man, wie oben verfahrend, Folgendes: Bei sich schneidenden Kreisen M_1 und M_2 gehen beide Potenzkreise durch die Schnittpunkte derselben und werden von einem die gegebenen rechtwinklig schneidenden Kreise ebenfalls rechtwinklig geschnitten; bei in einander liegenden Kreisen aber wird der äussere Potenzkreis im Durchmesser, der innere rechtwinklig geschnitten von einem Kreise, welcher die gegebenen rechtwinklig schneidet. Also:

Lehrsatz 30. *Von den zwei gegebene rechtwinklig schneidenden Kreisen wird irgend ein Potenzkreis der gegebenen je nach der Lage der letzteren entweder rechtwinklig oder im Durchmesser geschnitten; im ersten Falle hat der Potenzkreis mit den gegebenen den ersten Potenzort gemein; schneiden sich die gegebenen Kreise, so gehen ihre beiden Potenzkreise durch ihre Schnittpunkte.*

Weil endlich in T_1 und T_2 ein Kreis die gegebenen gleichartig, in T_1 und T_2' aber ungleichartig berühren kann, so haben die respectiven Potenzkreise zu den entsprechenden Berührungskreisen ganz dieselben Beziehungen, wie zu den die gegebenen rechtwinklig schneidenden. Wir fassen dies in folgender Weise zusammen:

Lehrsatz 31. *Bei zwei ausser einander liegenden (sich schneidenden, in einander liegenden) Kreisen schneidet ein Berüh-*

rungskreis mit gleichartiger Berührung den äusseren Potenzkreis rechtwinklig (rechtwinklig, im Durchmesser), ein Berührungskreis mit ungleichartiger Berührung aber den inneren Potenzkreis im Durchmesser (rechtwinklig).

§. 8.

Pol und Polare.

Hat man auf einem Radius MB (Fig. 19.) eines Kreises M innerhalb desselben den Punkt Q und man zieht durch Q die kleinste Sehne S_1S_2, in S_1 und S_2 aber Tangenten an den Kreis, so treffen sich diese auf der Verlängerung von MB in einem Punkte P. Errichtet man noch auf MP in P und Q senkrechte Gerade, L_1L_2 und $L'L''$, so nennt man P und Q conjugirte Pole, P den Pol der Geraden $L'L''$, die Gerade $L'L''$ die Polare des Punktes P, Q den Pol von L_1L_2 und L_1L_2 die Polare von Q — in Bezug auf den Kreis M.

Aus P lässt sich ein Kreis durch S_1 und S_2 legen, welcher den Kreis M rechtwinklig schneidet, und zugleich haben beide $L'L''$ zum ersten Potenzort. Aus einem zweiten Punkt P' auf L_1L_2 kann man ferner mit der Tangente $P'T'$ einen Kreis beschreiben, der den Kreis M ebenfalls rechtwinklig schneidet; er bildet mit ihm die gemeinschaftliche Sekante (den ersten Potenzort) $T'T''$. Weil nun umgekehrt der Kreis M sowohl den Kreis P, als auch P' rechtwinklig schneidet, so liegt der Mittelpunkt M desselben auf dem ersten Potenzorte der Kreise P und P' (Lehrs. 11.); dieser ist folglich MP selbst. Auf ihm müssen sich die beiden anderen ersten Potenzörter $L'L''$ und $T'T''$ schneiden (Lehrs. 16.); mithin geht $T'T''$ durch Q. Dies findet Statt für jeden solchen Kreis, wie P'. Was aber für L_1L_2 und Q gilt, ist auch für $L'L''$ und P richtig, nur dass bei $L'L''$ von denjenigen Punkten abgesehen werden muss, welche zwischen S_1 und S_2 liegen, indem für sie rechtwinklig schneidende Kreise nicht existiren. Also:

Lehrsatz 32. *Die gemeinschaftlichen Sehnen, welche durch die aus den verschiedenen Punkten einer Geraden beschriebenen, einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidenden Kreise mit diesem bestimmt werden, schneiden sich (nöthigenfalls verlängert) in dem Pol der Geraden.*

§. 9.

Construction der Mittelpunkte von Berührungskreisen für zwei gegebene Kreise.

Hat man den aus m beschriebenen, zwei gegebene Kreise M_1 und M_2 in T_1 und T_2 gleichartig berührenden Kreis in Fig. 20., so geht die Verbindungsgerade T_1T_2 durch den äusseren Aehnlichkeitspunkt A der Kreise M_1 und M_2 nach Lehrsatz 22. und die Tangenten T_1 und T_2 schneiden sich in P' auf dem ersten Potenzorte G_1G_2 der Kreise M_1 und M_2 nach Lehrs. 21. Die Polare eines beliebigen Punktes P auf G_1G_2 in Bezug auf M_1 möge L_1L' und in Bezug auf M_2 die Gerade L_2L'' sein, ferner soll L_1L' mit $P'T_1$ den Durchschnitt U_1, sowie L_2L'' mit $P'T_2$ den Durchschnitt U_2 bilden. Da U_1T_1 Tangente an M_1 ist, so lässt sich aus U_1 mit U_1T_1 ein den Kreis M_1 rechtwinklig schneidender Kreis beschreiben, dessen Sehne T_1V_1 mit M_1 durch den Pol P von L_1L' gehen muss nach Lehrs. 32.; ebenso muss die von einem aus U_2 mit U_2T_2 beschriebenen Kreise, welcher den Kreis M_2 rechtwinklig schneidet, mit M_2 gebildete Sehne T_2V_2 ebenfalls den Punkt P treffen, weil P Pol von L_2L'' in Bezug auf M_2 ist. Die Verbindungsgerade V_1V_2 geht verlängert durch den Punkt A nach Lehrs. 29. Aus P' kann man mit $P'T_1 = P'T_2$ einen Kreis schlagen, welcher die Kreise U_1 und U_2 in T_1 und T_2 berührt, weshalb auf T_1T_2 ein Aehnlichkeitspunkt der Kreise U_1 und U_2 liegt, und weil in V_1 und V_2 ein Kreis die gegebenen rechtwinklig schneiden kann (da V_1V_2 durch A geht), dieser aber die M_1 und M_2 bezüglich rechtwinklig schneidenden Kreise U_1 und U_2 in V_1 und V_2 berühren muss, so befindet sich dieser Aehnlichkeitspunkt der Kr. U_1 und U_2 auch auf V_1V_2. Hieraus ergiebt sich, dass der eine Aehnlichkeitspunkt der Kreise U_1 und U_2 der Durchschnitt von T_1T_2 und V_1V_2, also nichts Anderes, als der Punkt A ist; da aber die Aehnlichkeitspunkte auf der Centrale ihrer Kreise liegen, so bilden die Punkte U_1, U_2, A eine Gerade.

Der Punkt P endlich ist erster Potenzpunkt nicht nur der Kreise U_1, M_1, M_2, sondern auch der Kreise U_2, M_1, M_2 und gehört folglich dem ersten Potenzorte der Kreise U_1 und U_2 an; auf diesem müssen sich ausserdem T_1M_1 und T_2M_2 in m treffen, da sie Tangenten an die Kreise U_1 und U_2 darstellen in Punkten T_1

und T_2, in welchen ein Kreis P' sie berührt. Mithin repräsentirt mP den ersten Potenzort der Kreise U_1 und U_2 und steht als solcher auf der Centrale U_1U_2 senkrecht.

Aus den soeben erörterten Eigenschaften unserer Figur lässt sich nun leicht eine Construction des Punktes m auf folgende Weise zusammensetzen.

Sind die Kreise M_1 und M_2 gegeben, so bestimme man ihren ersten Potenzort G_1G_2 und ihren äusseren Aehnlichkeitspunkt A, ziehe durch A die beliebige Gerade AZ, fälle sodann von dem beliebigen Punkte P des ersten Potenzortes G_1G_2 auf AZ das Loth PK, construire zu P die Polare L_1L' in Bezug auf M_1, ziehe vom Durchschnitt U_1 von L_1L' mit AZ an M_1 die Tangente U_1T_1 verbinde T_1 mit M_1 und bringe PK mit T_1M_1 zum Durcschnitt in m. Dann ist m Mittelpunkt eines Kreises, welcher M_1 und M_2 gleichartig berührt und mT_1 sein Radius.

Für den inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise M_1 und M_2 und einen ungleichartig berührenden Kreis gilt die vorstehende Betrachtung und Construction gleichfalls, wie man sich durch Ansicht der Fig. 21. leicht überzeugt.

§. 10.

Construction der Mittelpunkte von den Kreisen, welche drei gegebene berühren.

Sind in Fig. 22. drei Kreise M_1, M_2, M_3 gegeben und man will andere beschreiben, welche die gegebenen alle drei zugleich berühren, so bestimme man zunächst den ersten Potenzpunkt P und die vier Aehnlichkeitsgeraden $A_1A_2A_3$, $A_1I_2I_3$, $A_2I_1I_3$, $A_3I_1I_2$ derselben. Nächstdem fälle man von P auf $A_1A_2A_3$ das Loth PK_1, construire zu P die Polare L_1L' in Bezug auf M_1 und ziehe vom Durchschnitt U_1 zwischen L_1L' und $A_1A_2A_3$ an den Kreis M_1 die Tangenten U_1T_1 und U_1T'. Verbindet man jetzt T_1 mit M_1, so giebt der Durchschnitt m_1 von T_1M_1 mit PK_1 den Mittelpunkt eines Kreises, welcher die Kreise M_1, M_2, M_3 gleichartig berührt; sein Radius ist m_1T_1. Der Kreuzungspunkt m' von $T'M_1$ mit PK_1 liefert den Mittelpunkt eines zweiten Kreises, der ebenfalls die gegebenen gleichartig berührt; sein Radius ist $m'T'$.

Die Richtigkeit dieser Construction folgt aus §. 9. und aus

der Bemerkung, dass P auf den ersten Potenzörtern der drei gegebenen Kreise zugleich liegt und die Gerade $A_1A_2A_3$ die äusseren Aehnlichkeitspunkte derselben gleichzeitig enthält.

Die Mittelpunkte der ungleichartig berührenden Kreise findet man, wie folgt.

Man fälle von P auf $A_1I_2I_3$ das Loth PK_2, ziehe vom Durchschnitt U_2 der Polare L_1L' mit $A_1I_2I_3$ an den Kreis M_1 die Tangenten U_2T_2 und U_2T'', verbinde T_2 mit M_1, sowie T'' mit M_1 und bringe T_2M_1 mit PK_2 in m_2 und $T''M_1$ mit PK_2 in m'' zum Durchschnitt. Dann ist sowohl m_2, als auch m'' Mittelpunkt eines Kreises, welcher die Kreise M_1 und M_2 gleichartig, M_1 und M_3 aber, sowie M_2 und M_3 ungleichartig berührt; der Radius des ersten ist m_2T_2, der des zweiten $m''T''$.

Eine entsprechende Construction in Bezug auf die Gerade $A_2I_1I_2$ giebt zwei Mittelpunkte m_3 und m''' für Kreise, welche die Kreise M_1 und M_3 gleichartig, M_1 und M_2 aber, sowie M_2 und M_3 ungleichartig berühren und ein analoges Verfahren in Bezug auf $A_3I_1I_2$ endlich liefert zwei Mittelpunkte m_4 und m'''' von Kreisen, welche die Kreise M_2 und M_3 gleichartig, M_1 und M_2 aber, sowie M_1 und M_3 ungleichartig berühren.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass im Allgemeinen für drei Kreise acht andere existiren, welche jene drei zugleich berühren. Diese Anzahl kann sich aber auf Grund der gegenseitigen Lage der gegebenen Kreise mehr oder weniger bedeutend reduciren.

Um nur ein Beispiel anzuführen, so kann der erste der gegebenen Kreise vom zweiten, dieser aber vom dritten wiederum vollständig eingeschlossen werden, für welchen Fall auch nicht ein einziger Kreis denkbar ist, welcher alle drei Kreise zugleich berührt.

§. 11.

Grenzfälle der Potenzörter.

Wir fragen, was aus den Potenzörtern zweier Kreise wird, wenn einer von letzteren oder beide in einen Punkt zusammenschrumpfen oder in eine Gerade sich ausstrecken, um die mitgetheilte Auflösung unserer Berührungsaufgabe auch dann anwenden zu können, wenn unter den gegebenen Gebilden (bisher nur Kreise) Punkte und Gerade vorkommen.

Ist in Fig. 23. ein Kreis M_1 und statt des zweiten ein Punkt M_2 gegeben, so darf man nur die in §. 1. mitgetheilte allgemeine Construction der Potenzörter für zwei Kreise mit den nöthigen Modificationen auf den gegenwärtigen Fall anwenden, um diejenigen für Punkt und Kreis zu ermitteln. Die Construction gestaltet sich folgendermassen.

Man ziehe M_1M_2, darauf senkrecht M_1E_1, verbinde E_1 mit M_2, halbire E_1M_2 in L und errichte $LM \perp E_1M_2$; macht man jetzt $M_2D = M_1M$ (vergl. (5)) und errichtet $G_1G_2 \perp M_1M_2$ in D, sowie $g_1g_2 \perp M_1M_2$ in M, dann ist G_1G_2 der erste und g_1g_2 der zweite Potenzort des Kreises M_1 und des Punktes M_2.

Die Stelle der Tangenten von einem Punkt P auf G_1G_2 an den Kreis M_2, welche wir früher oft erwähnt haben, vertritt offenbar jetzt die einfache Verbindungsgerade des Punktes P mit dem Punkte M_2; daher lautet dem Lehrs. 6. entsprechend folgender

Lehrsatz 33. *Jeder Punkt auf dem ersten Potenzort eines Punktes und eines Kreises hat die Eigenschaft, dass die Tangente von ihm nach dem Kreise gleich seiner Verbindungsgeraden mit dem Punkte ist.*

Umgekehrt:

Lehrsatz 34. *Hat ein Punkt die Eigenschaft, dass die Tangente von ihm an einen Kreis gleich seiner Verbindungsgeraden mit einem zweiten Punkte ist, so gehört derselbe dem ersten Potenzorte des letzteren Punktes und des Kreises an.*

Reducirt sich auch der Kreis M_1 auf einen Punkt, so fällt die Gerade E_1M_2 mit M_1M_2 und der Punkt L mit M zusammen, so dass M sowohl, als auch D in der Mitte von M_1M_2 liegen. Folglich muss als erster, wie auch als zweiter Potenzort zweier Punkte die Gerade angesehen werden, welche auf ihrer Verbindungsgeraden in der Mitte senkrecht steht.

Um den ersten Potenzort für eine Gerade G_1G_2 und einen Kreis M_1 zu ermitteln, lassen wir in Fig. 24. den Mittelpunkt eines Kreises M_2, welcher die Gerade in demjenigen Punkte F_2 berührt, in welchem dieselbe von dem Lothe aus M_1 auf G_1G_2 getroffen wird, allmählig nach rechts auf der Centrale M_1M_2 in grössere und grössere Entfernung rücken, endlich im Unendlichen verschwinden; sein Radius R_2 wird dabei unendlich gross, er selbst geht in die Gerade G_1G_2 über. Trifft nun der erste Potenzort der Kreise M_1 und M_2

bei einer bestimmten Grösse von M_2 die Centrale in D und schneidet M_1 die Centrale in F_1, so hat man:

$$M_2D^2 - M_1D^2 = R_2^2 - R_1^2, \text{ ferner}$$

$$M_2D = R_2 + F_2D \text{ und } M_1D = M_1F_2 - F_2D.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe verwandelt sich die erste Gleichung nach Weglassung etlicher Glieder, welche sich auf Null reduciren, und Transponirung eines Gliedes in folgende:

$$2R_2 . F_2D + 2M_1F_2 . F_2D = M_1F_2^2 - R_1^2 \text{ oder}$$

$$2(R_2 + M_1F_2) . F_2D = (R_1 + M_1F_2) . F_1F_2.$$

Folglich erhält man:

$$(36)\quad F_2D = \tfrac{1}{2}F_1F_2 . \frac{R_1 + M_1F_2}{R_2 + M_1F_2}.$$

Dieser Gleichung kann man die Form geben:

$2\frac{F_2D}{F_1F_2} = \frac{R_1 + M_1F_2}{R_2 + M_1F_2}$; dabei ist $F_2D = F_1F_2 - F_1D$, sowie

$$R_1 + M_1F_2 = R_2 + M_1F_2 - (R_2 - R_1);$$

mithin $$2\frac{F_2D}{F_1F_2} = 2 - 2\frac{F_1D}{F_1F_2}$$

und $\frac{R_1 + M_1F_2}{R_2 + M_1F_2} = 1 - \frac{R_2 - R_1}{R_2 + M_1F_2}$. Daher ergiebt sich:

$$2\frac{F_1D}{F_1F_2} = 1 + \frac{R_2 - R_1}{R_2 + M_1F_2} = \frac{2R_2 + M_1F_2 - R_1}{R_2 + M_1F_2} \text{ oder}$$

$$(37)\quad F_1D = F_1F_2 . \frac{1 + \frac{F_1F_2}{2R_2}}{1 + \frac{M_1F_2}{R_2}}.$$

Die auf der rechten Seite in den Formeln (36) und (37) vorkommenden Grössen behalten mit Ausnahme von R_2 bei der Veränderung des Kreises M_2 beständige Werthe, da derselbe, wie gross er auch wird, stets G_1G_2 in F_2 berühren muss. Wir werden also aus (36) und (37) dadurch, dass wir R_2 unendlich gross setzen, die Werthe von F_2D und F_1D finden für den Fall, dass der Kreis M_2 in die Gerade G_1G_2 übergeht. Wenn aber der Nenner eines Bruches über alle Grenzen hinaus wächst, während sein Zähler seinen endlichen Werth behält, wie dies bei dem in (36) vorkommenden Bruche und bei den in (37) stehenden, nämlich $\frac{F_1F_2}{2R_2}$ und $\frac{M_1F_2}{R_2}$, Statt findet, so nähert sich gleichzeitig der Werth

des ganzen Bruches der Null. Vermöge dieser Bemerkung erhält man aus (36):

$$F_2D = 0 \text{ und aus } (37)\text{: } F_1D = F_1F_2.$$

Die auf solche Weise gefundenen Werthe lehren, dass der Punkt D nach F_2 rückt, während der Kreis M_2 sich in die Gerade G_1G_2 verwandelt, und folglich muss man als den ersten Potenzort einer Geraden und eines Kreises die Gerade selbst nehmen.

Dies bleibt offenbar auch richtig, wenn der Kreis M_1 sich auf seinen Mittelpunkt reducirt, mithin wird auch bei einem Punkt und einer Geraden die Gerade selbst als erster Potenzort gelten müssen.

Ja, es kann selbst dann sich nicht ändern, wenn der Kreis M_1 durch unbegrenzte Zunahme seines Radius in eine zweite Gerade übergeht, weil auf die Grösse des Radius von M_1 gar Nichts ankommt; daher denn bei zwei Geraden die eine derselben für den ersten Potenzort beider zu halten ist.

Bedienen wir uns zur Bestimmung des zweiten Potenzortes in dem Falle, dass einer oder jeder der beiden Kreise in eine Gerade sich verwandelt, des in Gleichung (5) enthaltenen Gesetzes, so ist klar, da der Mittelpunkt M_2 im Unendlichen liegt, M_1F_2 aber eine endliche Grösse hat, dass der zweite Potenzort einer Geraden und eines Kreises im Unendlichen sich befindet; und dasselbe findet natürlich Statt, wenn ein Punkt und eine Gerade oder zwei Gerade gegeben sind.

§. 12.

Grenzfälle der Aehnlichkeitspunkte und der Potenzkreise.

Für den äusseren Aehnlichkeitspunkt A zweier Kreise M_1 und M_2 in Fig. 16 besteht die Proportion:

$$M_2A : M_1A = R_2 : R_1 \text{ oder}$$
$$M_2A : M_1M_2 + M_2A = R_2 : R_1, \text{ also auch}$$
$$M_1M_2 : M_2A = R_1 - R_2 : R_2, \text{ woraus sich ergiebt:}$$

$$(38)\quad M_2A = M_1M_2 \cdot \frac{R_2}{R_1 - R_2}.$$

Für den inneren Aehnlichkeitspunkt I hat man:

$$M_2I : M_1I = R_2 : R_1 \text{ oder}$$
$$M_2I : M_1M_2 - M_2I = R_2 : R_1, \text{ daher}$$
$$M_1M_2 : M_2I = R_1 + R_2 : R_2, \text{ und daraus folgt:}$$

$$(39)\quad M_2I = M_1M_2 \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}.$$

Da sich nun die Ausdrücke in (38) und (39) für $R_2 = 0$ in $M_2A = M_2I = 0$ verwandeln, so fallen beide Aehnlichkeitspunkte im Punkte M_2 zusammen. Folglich gilt für einen Punkt und einen Kreis der Punkt selbst sowohl als äusserer, als auch als innerer Aehnlichkeitspunkt.

Stellt man sich unter R_2 den grösseren Radius vor, so lässt sich die Proportion für den äusseren Aehnlichkeitspunkt darstellen in der Form:

$$M_1A + M_1M_2 : M_1A = R_2 : R_1, \text{ vergl. Fig. 24, daher}$$
$$M_1M_2 : M_1A = R_2 - R_1 : R_1;$$

woraus man, da $M_1M_2 = R_2 + M_1F_2$ ist, erhält:

$$(40)\quad M_1A = R_1 \cdot \frac{R_2 + M_1F_2}{R_2 - R_1} = R_1 \cdot \frac{1 + \frac{M_1F_2}{R_2}}{1 - \frac{R_1}{R_2}}.$$

Wenn man die Proportion für den innern Aehnlichkeitspunkt dem entsprechend behandelt, so gelangt man zu:

$$(41)\quad M_1I = R_1 \cdot \frac{R_2 + M_1F_2}{R_2 + R_1} = R_1 \cdot \frac{1 + \frac{M_1F_2}{R_2}}{1 + \frac{R_1}{R_2}}.$$

Lässt man jetzt den Kreis M_2 in eine Gerade, welche ihn in F_2 berührt, übergehen, so hat man R_2 in (40) und (41) unendlich gross anzunehmen; unter dieser Annahme werden $\frac{M_1F_2}{R_2}$ und $\frac{R_1}{R_2}$ der Null gleich und die Werthe von (40) und (41) gehen folglich über in:

$$M_1A = M_1I = R_1.$$

Hieraus sieht man, dass die Aehnlichkeitspunkte einer Geraden und eines Kreises in den Durchschnittspunkten des vom Mittelpunkt des Kreises auf die Gerade gefällten Lothes mit dem Kreise liegen.

Sind zwei Punkte gegeben, so hat man einen besonderen Fall desjenigen, bei welchem ein Punkt und ein Kreis gegeben war und der gegenwärtige geht aus demselben dadurch hervor, dass der Kreis in seinen Mittelpunkt zusammenfällt; weil aber die Grösse des Radius hierbei auf die Lage der Aehnlichkeitspunkte keinen Einfluss hat, so folgt, dass bei zwei Punkten in dem einen von beiden der äussere und innere Aehnlichkeitspunkt sich befinden.

Die noch übrigen Fälle lassen sich aus demjenigen ableiten, in welchem eine Gerade und ein Kreis gegeben sind. Reducirt sich der Kreis auf seinen Mittelpunkt, so fallen auch alle Punkte seines Umfanges in diesen, also auch die beiden Aehnlichkeitspunkte, daher bei einem Punkt und einer Geraden beide Aehnlichkeitspunkte in dem Punkte selbst befindlich gedacht werden müssen. Verwandelt sich endlich der Kreis in eine zweite Gerade dadurch, dass sein Mittelpunkt in das Unendliche rückt, so geht gleichzeitig die Gerade, auf welcher die Aehnlichkeitspunkte liegen, in das Gebiet der Unendlichkeit über, und folglich gehören die beiden Aehnlichkeitspunkte zweier Geraden dem Unendlichen an.

Bezeichnet man, wie früher, durch $R(A)$ den Radius des äusseren Potenzkreises der Kreise M_1 und M_2 in Fig. 16. und man nennt F_1 und F_3 die Durchschnitte des Kreises M_1 mit der Centrale M_1M_2, sowie F_2 und F_4 die von M_2 mit dieser Geraden, so kann ein Kreis die gegebenen in F_1 und F_2 gleichartig berühren und man hat deshalb:

$$R(A)^2 = AF_1 \,.\, AF_2 \text{ (vergl. §. 7.).}$$

Setzt man hierin $M_1M_2 + M_2A + R_1$ für AF_1 und $M_2A - R_2$ für AF_2, so bekommt man:

$$(42)\quad R(A)^2 = (M_1M_2 + M_2A + R_1)\,.\,(M_2A - R_2);$$

setzt man aber nach Fig. 24. $M_1A + R_1$ für AF_1 und $M_1F_2 + M_1A$ für AF_2, so bekommt man:

$$(43)\quad R(A)^2 = (R_1 + M_1A)\,.\,(M_1F_2 + M_1A).$$

Auf dieselbe Weise findet man für den Radius $R(I)$ des inneren Potenzkreises aus der Gleichung:

$$R(I)^2 = IF_3 \,.\, IF_2$$

folgende Werthe:

$$(44)\quad R(I)^2 = (M_1M_2 - M_2I - R_1)\,.\,(M_2I + R_2) \text{ nach Fig. 16. und}$$

$$(45)\quad R(I)^2 = (R_1 + M_1I)\,.\,(M_1F_2 - M_1I) \text{ nach Fig. 24.}$$

Weil nun für $R_2 = 0$ der Werth von M_2A und M_2I sich auf Null reducirt, wie oben bewiesen worden ist, so erhält man aus (42) und (44)

$$R(A) = R(I) = 0, \text{ d. h.}$$

sowohl der äussere, als auch der innere Potenzkreis für einen Punkt und einen Kreis fällt in den Punkt zusammen.

Wird aber R_2 unendlich gross gedacht, so hat man

$$M_1A = M_1I = R_1,$$

wodurch sich aus (43) und (45) folgende Werthe ergeben:

$$(46)\quad R(A)^2 = 2R_1 . (M_1F_2 + R_1) \text{ und}$$

$$(47)\quad R(I)^2 = 2R_1 . (M_1F_2 - R_1).$$

Will man daher für einen Kreis und eine Gerade den Radius des äusseren Potenzkreises bestimmen, so suche man die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser des Kreises und der Summe seines Mittelpunktsabstandes von der Geraden und seines Radius; will man aber den Radius des inneren Potenzkreises finden, so suche man die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser des gegebenen Kreises und der Differenz des Mittelpunktsabstandes von der Geraden und des Radius.

Hieraus zieht man endlich leicht die Folgerungen, dass die Potenzkreise für einen Punkt und eine Gerade in den Punkt zusammenfallen, die Radien derselben hingegen unendlich gross werden für zwei Gerade.

§. 13.

Veränderte Construction für die Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche drei gegebene berühren.

In manchen Fällen kann uns die in §. 10. mitgetheilte Construction im Stich lassen, was namentlich dann geschieht, wenn der erste Potenzpunkt der drei gegebenen Kreise nicht im Endlichen liegt; dieser Fall tritt ein, wenn die Mittelpunkte der gegebenen Kreise auf einer Geraden sich befinden. Will man eine Auflösung haben, die auch dann noch ausführbar ist, so muss man erstens die Centralen PK_1 u. s. w. der Berührungskreise und

zweitens die Pole U_1 u. s. w. der Berührungssehnen unabhängig vom ersten Potenzpunkt P der gegebenen Kreise zu construiren suchen. Dies wollen wir im Folgenden thun.

Die Kreise m_1 und m', sowie m_2 und m'' in Fig. 22. berühren die gegebenen M_1 und M_2 gleichartig; der Potenzkreis, welcher aus A_1, dem äusseren Aehnlichkeitspunkte der Kreise M_1 und M_2, beschrieben werden kann, wird also von jenen vier Berührungskreisen entweder rechtwinklig oder im Durchmesser geschnitten (Lehrs. 31). Dasselbe gilt von den Kreisen m_1, m', m_3, m''' in Bezug auf den Potenzkreis A_2 (der Kreise M_1 und M_3), sowie von m_1, m', m_4, m'''' in Bezug auf den Potenzkreis A_3 (der Kreise M_2 und M_3). Nun muss bei jeder beliebigen Lage der gegebenen Kreise wenigstens zwei Potenzkreisen dasselbe widerfahren von Seiten der zu ihnen gehörigen Berührungskreise (vergl. Lehrs. 31.). Es können also etwa die beiden Potenzkreise A_1 und A_2 von ihren respectiven Berührungskreisen rechtwinklig geschnitten werden; dann müssen, wie aus der vorstehenden Gruppirung der Berührungskreise in Bezug auf die Potenzkreise hervorgeht, die Kreise m_1 und m' gleichzeitig die Kreise A_1 und A_2 rechtwinklig schneiden. Daher schneiden auch umgekehrt diese Potenzkreise die Kreise m_1 und m' rechtwinklig und haben folglich die Centrale dieser Berührungskreise zum ersten Potenzort (Lehrs. 13.) Werden aber die Potenzkreise A_1 und A_2 (oder zwei andere) von ihren respectiven Berührungskreisen, also von m_1 und m' gleichzeitig, im Durchmesser geschnitten, so haben sie die Centrale dieser Berührungskreise zu ihrem zweiten Potenzort (Lehrs. 14.). In beiden Fällen kann diese Centrale als durch die Potenzkreise bestimmt angesehen werden. Ganz dasselbe gilt aber offenbar von den übrigen Potenzkreisen und Centralen.

Nennt man jetzt denjenigen Kreis, welcher aus U_1 auf $A_1A_2A_3$ mit der Tangente $U_1T_1 = U_1T'$ beschrieben werden kann, den äusseren Polkreis, die aus U_2, U_3, U_4 respective mit $U_2T_2 = U_2T''$, $U_3T_3 = U_3T'''$, $U_4T_4 = U_4T''''$ beschriebenen bezüglich den ersten, zweiten, dritten inneren Polkreis des Kreises M_1 und giebt den entsprechenden Kreisen für M_2, M_3 analoge Namen, so folgt aus der in §. 9. angestellten Betrachtung, dass die drei äusseren Polkreise der drei gegebenen die Centrale PK_1 oder m_1m', die drei ersten inneren die Centrale m_2m'', die

drei zweiten inneren $m_3 m'''$ und die drei dritten inneren $m_4 m''''$ jedesmal zum ersten Potenzort haben und dass alle Polkreise die bezüglichen Berührungskreise rechtwinklig schneiden.

Wenn also zuerst von den beiden oben angeführten Fällen derjenige eintritt, in welchem zwei Potenzkreise (etwa die beiden äusseren A_1 und A_2) die Kreise m_1 und m' rechtwinklig schneiden, so haben sie mit den äusseren Polkreisen die Centrale $m_1 m'$ zum gemeinschaftlichen ersten Potenzort.

Gesetzt nun, die Potenzkreise schneiden sich, so gehen die äusseren Polkreise durch ihre Kreuzungspunkte; wenn dann einer dieser Punkte mit D bezeichnet wird, so müssen $U_1 D$, $U_1 T_1$ und $U_1 T'$ als Radien des äusseren Polkreises U_1 einander gleich sein; da aber $U_1 T_1$ und $U_1 T'$ Tangenten an den Kreis M_1 sind, so liegt U_1 auf dem ersten Potenzort des Punktes D und des Kreises M_1 (vergl. Lehrs. 33.). Bestimmt man daher diesen Potenzort, so giebt der Durchschnitt desselben mit $A_1 A_2 A_3$ den Punkt U_1.

Schneiden sich aber die die Berührungskreise m_1 und m' rechtwinklig schneidenden äusseren Potenzkreise (A_1 und A_2) nicht, so lege man von irgend einem Punkte X auf der Centrale $m_1 m'$ an einen von ihnen eine Tangente und beschreibe mit ihr um jenen Punkt X einen Kreis; dieser schneidet sowohl die Potenzkreise, als auch die Polkreise rechtwinklig (Lehrs. 8.). Mithin schneidet auch umgekehrt jeder der Polkreise, z. B. U_1, denselben rechtwinklig und weil U_1 ausserdem den Kreis M_1 ebenfalls rechtwinklig schneidet, so gehört der Punkt U_1 dem ersten Potenzorte der Kreise X und M_1 an (Lehrs. 11.). Construirt man folglich diesen Potenzort, so ist im Durchschnitt desselben mit $A_1 A_2 A_3$ der Punkt U_1 gefunden.

Sollten endlich die Berührungskreise m_1 und m' die Potenzkreise im Durchmesser schneiden, so dass die Centrale $m_1 m'$ in Bezug auf letztere zweiter Potenzort ist (Lehrs. 14.), und man construirt aus einem beliebigen Punkte der Centrale einen Kreis, welcher die Potenzkreise im Durchmesser schneidet, so schneidet dieser die Polkreise rechtwinklig (Lehrs. 15.) und das unmittelbar vorher Gesagte findet auch dann Anwendung.

Vorstehende Erörterungen gelten unbeschränkt auch für die inneren Potenz- und Polkreise; das Verhalten der Berührungkreise gegen die Potenzkreise kann ausserdem jedesmal aus der Lage der gegebenen Kreise beurtheilt werden (Lehrs. 31.); somit haben wir

im Vorhergehenden die Aufgabe, Mittelpunkte von Kreisen zu finden, welche drei gegebene berühren, mit Umgehung des ersten Potenzpunktes vollständig gelöst, indem das weitere Verfahren, welches nach Auffindung der Mittelpunkte der Polkreise zu den Mittelpunkten der Berührungskreise selbst führt, dasselbe bleibt, wie in §. 10.

Wir wollen diese Auflösung auf den Fall anwenden, welcher in Fig. 25. dargestellt ist, bei welchem die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der gegebenen Kreise in einer Geraden liegen, so zwar, dass die Kreise M_2 und M_3 von M_1 eingeschlossen werden, sich selbst aber schneiden.

Da hier die Kreise M_2 und M_3 zu M_1 dieselbe Lage, unter einander aber eine davon abweichende haben, so bestimme man die Aehnlichkeitspunkte A_1 und A_2 und die zu ihnen gehörigen Potenzkreise, indem man $R(A_1)$ und $R(A_2)$ bezüglich als mittlere Proportionalen zwischen A_1F_1 und A_1F_2 und zwischen A_2F_1 und A_2F_3 bestimmt. Weil die Kreise M_2 und M_3 von M_1 eingeschlossen werden, so zeichne man zu diesen Potenzkreisen den zweiten Potenzort g_1g_2, welcher M_2M_3 in K trifft, beschreibe um K einen Kreis so, dass er die Kreise A_1 und A_2 im Durchmesser schneidet und construire den ersten Potenzort G_1G_2 dieses Kreises und des Kreises M_1. Trifft dieser A_1A_2 in U_1, so ziehe man von U_1 an den Kreis M_1 die Tangenten U_1T_1 und U_1T' und bringe M_1T_1 und M_1T' mit g_1g_2 in m_1 und m' zum Durchschnitt. Dann hat man in diesen Punkten die Mittelpunkte derjenigen Kreise gefunden, welche die Kreise M_1, M_2, M_3 gleichartig berühren.

Will man in diesem Falle Mittelpunkte solcher Kreise finden, welche M_2 und M_3 gleichartig, nämlich von aussen, M_1 aber von innen berühren, so suche man die Aehnlichkeitspunkte A_3, I_1, I_2; hier verhalten sich die Berührungskreise ganz gleich gegen die Potenzkreise A_3, I_1, I_2, sie schneiden dieselben nämlich alle rechtwinklig (Lehrs. 31.). Man construire also, wie in Fig. 26., zwei von ihnen, etwa I_1 und I_2, indem man die mittlere Proportionale zwischen I_1F_2 und I_1F_4, sowie zwischen I_2F_3 und I_2F_4 bestimmt; da sich diese Kreise in D schneiden, so zeichne man den ersten Potenzort $G'G''$ des Punktes D und des Kreises M_1, bringe $G'G''$ mit I_1I_2 in U_2 zum Durchschnitt, ziehe von U_2 an M_1 die Tangenten U_2T_2 und U_2T'' und verbinde M_1 mit T_2 und mit T'', so schneiden diese Geraden den ersten Potenzort G_1G_2

der Potenzkreise in m_2 und m'' als den beiden gesuchten Mittelpunkten der Berührungskreise.

Andere als die vier construirten Berührungskreise existiren bei der angenommenen Lage der gegebenen Kreise nicht.

§. 14.

Berührungsaufgaben, bei welchen Kreise, Gerade und Punkte gegeben sind.

In der Aufgabe, deren Lösung wir in §. 9. und §. 13. mitgetheilt haben, kann jeder von den drei gegebenen Kreisen entweder durch eine Gerade, oder durch einen Punkt ersetzt und auf solche Weise eine Reihe neuer Aufgaben gebildet werden, in welchen die Beschreibung von Kreisen gefordert wird, welche die gegebenen drei Gebilde zu gleicher Zeit berühren. Die hierdurch entspringenden Aufgaben lassen sich nach der Beschaffenheit ihrer gegebenen Gebilde folgendermassen zusammenstellen. Es sind gegeben:

I. Zwei Kreise und { 1) eine Gerade,
2) ein Punkt;

II. Ein Kreis und { 3) zwei Gerade,
4) eine Gerade und ein Punkt,
5) zwei Punkte;

III. Zwei Gerade und { 6) ein Punkt,
7) eine Gerade;

IV. Zwei Punkte und { 8) eine Gerade,
9) ein Punkt.

So lange in einer solchen Aufgabe nur eins von den gegebenen Gebilden ein Kreis ist, lassen sich die allgemeinen Auflösungen des §. 9. und §. 13. auf den jedesmaligen Fall anwenden, wie wir dies an folgendem Beispiele nachweisen wollen.

Aufgabe. *Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht (und einen gegebenen Punkt berührt).*

Wir nehmen zuerst an, dass die Gerade auf der Verbindungsgeraden des Punktes mit dem Mittelpunkt des Kreises nicht senkrecht steht. Ist also in Fig. 27. der Kreis M, die Gerade FF_1 und der Punkt H gegeben, so bestimme man zunächst den ersten Po-

tenzpunkt P der drei Gebilde als Durchschnitt ihrer ersten Potenzörter (§. 11.). Derselbe liegt im Durchkreuzungspunkt des ersten Potenzortes GG_1 für den Punkt H und den Kreis M mit der Geraden FF_1. Um die Aehnlichkeitsgeraden zu construiren, fälle man von M auf FF_1 ein Loth, welches (verlängert) den Kreis in A und I trifft, und verbinde H mit A und mit I; dann sind HA und HI diese Geraden (§. 12.). Fällt man jetzt von P auf HA das Loth PK_1, bestimmt die Polare LL_1 von P in Bezug auf den Kreis M und deren Durchschnitt U_1 mit HA, legt von U_1 an M die Tangenten U_1T_1 und U_1T' und bringt endlich die Radien MT_1 und MT' mit PK_1 zum Durchschnitt in m_1 und m', so hat man in diesen Punkten zwei Mittelpunkte solcher Kreise gefunden, wie sie die Aufgabe verlangt.

Zwei andere m_2 und m'' findet man mittelst der Aehnlichkeitsgeraden HI.

Wenn aber die Gerade auf der Verbindungsgeraden des Punktes mit dem Mittelpunkt des Kreises senkrecht steht, so verfahre man nach §. 13., wie folgt. Wenn der Punkt H, wie in Fig. 28., ausserhalb des Kreises M und auf der Seite der Geraden FF_1 sich befindet, auf welcher auch der Mittelpunkt M liegt, so ist man berechtigt, die Sache so aufzufassen, als lägen alle drei gegebene Gebilde ausser einander. Man beschreibe über AD einen Halbkreis (D ist der Durchschnitt von MH mit FF_1), errichte $IB \perp MH$, wodurch AB, die mittlere Proportionale zwischen AI und AD, als Radius des äusseren, und IB, die mittlere Proportionale zwischen IA und ID, als Radius des inneren Potenzkreises der Geraden FF_1 und des Kreises M gefunden wird (§. 12.), bestimme den ersten Potenzort GG_1 des Punktes H, in welchem die übrigen Potenzkreise zusammenfallen (§. 12.), und des Potenzkreises A, der mit AB beschrieben ist, ziehe aus dem Durchschnitt X von GG_1 mit MH einen Kreis durch H und suche zu diesem und dem Kreis M den ersten Potenzort, respective dessen Durchschnitt U_1 mit MH, der Aehnlichkeitsgeraden. Die Tangenten U_1T_1 und U_1T' von U_1 an den Kreis M bestimmen jetzt die Punkte T_1 und T', deren Verbindungsgerade mit M auf GG_1 zwei Mittelpunkte m_1 und m' solcher Kreise geben, welche den Kreis M (von aussen) und die Gerade FF_1 berühren und durch den Punkt H gehen.

Zieht man aus I den inneren Potenzkreis mit IB, sucht zu ihm und dem Punkte H den zweiten Potenzort gg_1, beschreibt

aus dessen Durchschnitt Y mit MH einen Kreis mit YB, welcher den Potenzkreis I im Durchmesser schneidet, ermittelt zu ihm und dem Kreis M den ersten Potenzort, respective dessen Durchschnitt U_2 mit MH und zieht von U_2 an M die Tangenten U_2T_2 und U_2T'', so bestimmen MT_2 und MT'' auf gg_1 die Mittelpunkte m_2 und m'' von zwei Kreisen, welche den Kreis M (von innen) und die Gerade FF_1 berühren und durch H gehen.

Bei solchen Aufgaben, welche unter den gegebenen Gebilden keinen Kreis zählen, werden gewisse Bestimmungsstücke der allgemeinen Auflösung für die Construction unmöglich, weil gewisse Punkte oder Gerade dem Unendlichen anheimfallen; sie lassen sich aber dennoch nach den bisher aufgestellten Grundsätzen lösen, wie wir im Folgenden zeigen werden.

Behandeln wir zuvörderst die

Aufgabe. *Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.*

Die gegebenen Geraden EE_1 und FF_1 in Fig. 29. mögen sich n N schneiden und H der gegebene Punkt sein. Der erste Potenzpunkt der drei Gebilde ist hier offenbar N, da EE_1 und FF_1 die ersten Potenzörter darstellen (§. 11.). Da ferner die Aehnlichkeitspunkte von H in Bezug auf jede der Geraden in H selbst liegen, die der Geraden unter einander aber im Unendlichen (§. 12.), so geht daraus Nichts über die Lage der Aehnlichkeitsgeraden in diesem Falle hervor. Denkt man sich aber um H einen Kreis mit beliebigem Radius beschrieben, fällt von H auf EE_1 das Loth He und auf FF_1 das Loth Hf, von denen das erste den Kreis in i, das zweite in i_1 trifft, und verbindet i mit i_1, so stellt ii_1 eine Aehnlichkeitsgerade des Kreises H und der beiden gegebenen Geraden dar (§. 12.); eine zweite aa_1 läuft mit dieser parallel durch die anderen Durchschnitte der Lothe mit dem Kreise. Schneidet nun ii_1 die Gerade EE_1 in e_1 und FF_1 in f_1, so ist
$\angle eie_1 = \angle Hii_1$ und $\angle fif_1 = \angle Hi_1i$, sowie $\angle Hii_1 = \angle Hi_1i$, mithin auch $\angle eie_1 = \angle fif_1$.

Weil aber die Winkel bei e und f rechte Winkel sind, so folgt weiter, dass man hat:

$$\angle ee_1i = \angle ff_1i, \text{ oder } \angle Ne_1f_1 = \angle Nf_1e_1.$$

Daraus geht hervor, dass die Aehnlichkeitsgerade ii_1 mit den gegebenen Geraden ein gleichschenkliges Dreieck bildet, was natürlich auch von aa_1 gelten muss.

Verkleinert man jetzt den Radius des Kreises *H*, so behalten die Aehnlichkeitsgeraden für jeden Werth des Radius die erwähnte Eigenschaft und nähern sich dem Mittelpunkte und somit auch einander selbst um so mehr, je kleiner der Radius angenommen wird. Im Grenzfalle, in welchem der Kreis in den Punkt *H* einschrumpft, muss folglich die einzige Aehnlichkeitsgerade durch *H* gehen und mit den gegebenen Geraden ein gleichschenkliges Dreieck bedingen, das Dreieck *NAI*.

Daher liegen die Mittelpunkte der Kreise, welche der Aufgabe genügen sollen, auf dem Lothe *NK* von *N* auf *AI*; dieses halbirt den von den gegebenen Geraden gebildeten Winkel *ENF*. Dass übrigens auf *NK* die Mittelpunkte aller Kreise sich befinden, welche EE_1 und FF_1 zugleich berühren, ist sehr bekannt und wir haben die vorstehende Begründung dieser Wahrheit nur deswegen ausgeführt, um sie in Zusammenhang mit unseren Betrachtungen zu bringen. Könnten wir nun zwar auch die Polare von *N* in Bezug auf *H* oder eine der Geraden vielleicht durch Grenzbetrachtungen ermitteln, so würde doch das Ziehen von begrenzten Tangenten, welches die allgemeine Auflösung fordert, unmöglich werden und es tritt daher die Nothwendigkeit ein, einen anderen, freilich durch die früheren Entwickelungen ebenfalls bedingten, Weg einzuschlagen.

Beschreibt man nämlich um einen beliebigen Punkt *M* auf *NK* mit dem Lothe *MQ* auf EE_1 einen Kreis, so berührt dieser die gegebenen Geraden, wie der gesuchte es ebenfalls soll; man hat also zwei Kreise, für welche EE_1 und FF_1 die äusseren gemeinschaftlichen Tangenten sind. Folglich stellt der Durchschnitt *N* von EE_1 und FF_1 den äusseren Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise dar. Wenn man nun *NH* zieht und dies schneidet den Kreis *M* in *h*, so giebt *Mh* einen Radius, mit welchem im gesuchten Kreise durch *H* ein Radius parallel hindurchgehen muss; mithin liefert eine Parallele durch *H* mit *hM* in ihrem Durchschnitt *m* mit *NK* den Mittelpunkt des gesuchten Kreises; sein Radius ist *mH*. Der zweite Durchschnitt des Hülfskreises *M* mit der Transversale *NH* führt zu einem zweiten Mittelpunkt, aus welchem sich ebenfalls ein der Aufgabe genügender Kreis beschreiben lässt.

Wenn die gegebenen Geraden EE_1 und FF_1 parallel sind, so ändert sich dadurch nichts Wesentliches an der vorstehenden Entwickelung; man hat nur den Durchschnitt der Geraden im Unendlichen befindlich zu denken.

Sind drei Gerade gegeben, die von einem Kreise berührt werden sollen, so wird der Mittelpunkt desselben nach dem Vorigen leicht mittelst zweier von den drei Halbirungsgeraden bestimmt, welche die von den Geraden gebildeten Winkel halbiren.

Wir stellen ferner unserer Eintheilung gemäss die

Aufgabe. *Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade berührt und durch zwei gegebene Punkte geht.*

Hat man ausser der Geraden EE_1 in Fig. 30. die beiden Punkte H_1 und H_2, so liegt der erste Potenzort der drei Gebilde in dem Durchschnitt P der auf der Verbindungsgeraden H_1H_2 in ihrer Mitte K senkrecht errichteten Geraden mit EE_1 (§. 11.). Die einzige Aehnlichkeitsgerade wird von H_1H_2 selbst repräsentirt (§. 12.); mithin enthält PK die Mittelpunkte aller durch H_1 und H_2 gehenden Kreise (wie auch sonst bekannt), also auch die der gesuchten. Beschreibt man jetzt um K durch H_1 und H_2 einen Kreis und legt an diesen vom Durchschnitt F zwischen H_1H_2 und EE_1 eine Tangente FT, so hat man in dieser die Länge der Tangenten von F an den gesuchten Kreis gefunden. Es ist nämlich, da der gesuchte Kreis durch H_1 und H_2 gehen soll, wie dies der Kreis K ebenfalls thut, H_1H_2 der erste Potenzort beider Kreise, die Tangenten von jedem Punkte auf H_1H_2 (verlängert) an die Kreise also gleich, z. B. die von F. Weil nun EE_1 den gesuchten Kreis berühren soll, so muss $FT_1 = FT$ die Länge der Tangente von F an den gesuchten Kreis sein. Errichtet man daher auf EE_1 in T_1 ein Loth, so bestimmt dies auf PK den Mittelpunkt m des gesuchten Kreises. Trägt man die Länge FT nach der anderen Seite von F aus auf EE_1 ab, so gelangt man durch den Endpunkt dieses Stückes auf gleiche Weise, wie durch den Punkt T_1, zu dem Mittelpunkt eines Kreises, der die Forderungen der Aufgabe gleichfalls erfüllt.

Steht die Verbindungsgerade der gegebenen Punkte auf der gegebenen Geraden senkrecht, d. h. liegen die Mittelpunkte derjenigen Kreise, aus welchen wir uns die gegebenen Gebilde entstanden denken können, auf einer Geraden, so ändert dies nichts Wesentliches an obiger Construction.

Soll endlich ein Kreis durch drei Punkte gelegt werden, so findet man nach dem Vorigen den Mittelpunkt desselben leicht vermöge des Durchschnittes der auf den Verbindungsgeraden der gegebenen Punkte in ihren Mitten errichteten Lothe.

§. 15.

Die sechs Kreise, von welchen die acht Berührungskreise dreier gegebenen quaternionsweise berührt werden.

Die acht Berührungskreise dreier gegebenen bilden vier Paare, indem zwei solche, deren Mittelpunkte demselben Lothe vom ersten Potenzpunkte auf eine Aehnlichkeitsgerade angehören, als ein Paar bildend angesehen werden können; diese Paare sind also (Fig. 22.):

Erstes Paar: m_1 und m',
Zweites „ : m_2 und m'',
Drittes „ : m_3 und m''',
Viertes „ : m_4 und m''''.

Man kann ferner Quaternionen aus den acht Berührungskreisen dergestalt formiren, dass jede Quaternion aus zweien der so eben aufgeführten Paare besteht; thut man dies auf alle nur mögliche verschiedene Arten, so erhält man folgende sechs Quaternionen:

erste Quaternion: m_1, m', m_2, m'',
zweite „ : m_1, m', m_3, m''',
dritte „ : m_1, m', m_4, m'''',
vierte „ : m_2, m'', m_3, m''',
fünfte „ : m_2, m'', m_4, m'''',
sechste „ : m_3, m''', m_4, m''''.

In §. 13. ist als Folgerung aus Lehrs. 31. die Behauptung ausgesprochen, dass die Kreise m_1 und m', sowie m_2 und m'' den Potenzkreis A_1 der Kreise M_1 und M_2 entweder rechtwinklig oder im Durchmesser schneiden; dieser Kreis wird also umgekehrt jene Berührungskreise entweder rechtwinklig schneiden, oder selbst von ihnen im Durchmesser geschnitten. Mithin ist der Punkt A_1 als der erste Potenzpunkt der Kreise m_1, m', m_2, m'' anzusehen (Umkehrung von Lehrs. 17.). Die Verbindungsgerade T_1T' ist ferner gemeinschaftliche Sehne des Polkreises U_1 und des Kreises M_1, welche sich rechtwinklig schneiden; sie muss daher durch P, den Pol von L_1L', worauf U_1 liegt, hindurchgehen (Lehrs. 32.). Weil nun die Centrale m_1m' ebenfalls den Punkt P enthält und die Kreise m_1 und m' in T_1 und T' von dem Kreise M_1 ungleichartig berührt werden, so ist P innerer Aehnlichkeitspunkt der Kreise m_1 und m' (Lehrs. 23.); durch ihn muss also eine innere Aehnlichkeits-

gerade sowohl der drei Kreise m_1, m', m_2, als auch der Kreise m_1, m', m'' hindurchgehen.

Fällt man jetzt auf die eben angedeutete Aehnlichkeitsgerade von m_1, m', m_2 ein Loth vom ersten Potenzpunkt A_1, so enthält dasselbe Mittelpunkte von Berührungskreisen, welche m_1 und m' ungleichartig berühren (vergl. §. 9.). Da aber M_3 ein solcher Kreis ist, so muss man dadurch, dass man A_1 mit M_3 verbindet und von P ein Loth auf A_1M_3 fällt, in diesem Lothe die besprochene Aehnlichkeitsgerade finden, auf welcher ausserdem der innere Aehnlichkeitspunkt von m_1 und m_2 und der äussere von m' und m_2 liegen werden; indem jene beiden Kreise ungleichartig, diese aber gleichartig von M_3 berührt werden. Weil nun A_1 auch erster Potenzpunkt der Kreise m_1, m', m'' ist, so muss dasselbe Loth von P auf A_1M_3 auch eine innere Aehnlichkeitsgerade dieser drei Kreise sein und noch den äusseren Aehnlichkeitspunkt von m_1 und m'' und den inneren von m' und m'' enthalten.

Die Polare von A_1 in Bezug auf den Kreis m_1 trifft die eben erwähnte Aehnlichkeitsgerade in einem Punkte, von dem aus eine Tangente an m_1 einen Berührungspunkt geben muss, der mit m_1 verbunden auf A_1M_3 den Punkt M_3 bestimmen wird. Der Berührungspunkt der Tangente ist folglich der von den Kreisen m_1 und M_3 gebildete und die Polare wird daher die Aehnlichkeitsgerade in demselben Punkte U treffen, wie die Tangente in diesem Berührungspunkt, so dass U ohne die Polare nur vermöge der erwähnten Tangente bestimmt werden kann.

Zieht man von U an m_1 die zweite Tangente Ut, verbindet m_1 mit t und bringt m_1t zum Durchschnitt mit A_1M_3 in M_3', so ist nach der ausgeführten Construction M_3' Mittelpunkt eines Kreises, der die drei Kreise m_1, m', m_2 berührt; weil aber diese Construction für die Kreise m_1, m', m'' unverändert bleibt, so berührt der Kreis M_3' die vier Berührungskreise m_1, m', m_2, m'' zu gleicher Zeit.

Der vorstehenden, die erste Quaternion von Berührungskreisen betreffenden, Betrachtung analoge finden Anwendung auch auf jede der übrigen Quaternionen und liefern noch fünf neue Mittelpunkte von Kreisen, von welchen die Berührungskreise quaternionsweise berührt werden. Für die zweite Quaternion ergiebt sich ein Mittelpunkt M_2' auf der durch A_2 und M_2 gehenden Geraden; für die

dritte ein solcher M_1' auf A_3M_1, für die vierte M_1'' auf I_3M_1, für die fünfte M_2'' auf I_2M_2 und für die sechste M_3'' auf I_1M_3. Also:

Lehrsatz 35. *Die drei gegebene Kreise berührenden acht Kreise haben eine solche Lage, dass sechs andere sich beschreiben lassen, welche je vier von den Berührungskreisen zugleich berühren.*

Ueber die bezeichneten sechs Kreise wollen wir noch einige Bemerkungen hinzufügen. Die Kreise mit den Mittelpunkten M_1', M_2', M_3' werden von m_1 und m' gleichzeitig berührt und zwar das Paar M_1', M_2' gleichartig, die beiden anderen Paare ungleichartig; aus der Construction in §. 10. folgert man deswegen sofort, dass die Centrale m_1m' durch den ersten Potenzpunkt der drei berührten Kreise gehen und auf einer von ihren inneren Aehnlichkeitsgeraden senkrecht stehen muss. Weil wir aber wissen, dass m_1m' ein Loth auf $A_1A_2A_3$ ist, so liegt also nicht nur der erste Potenzpunkt von M_1', M_2', M_3' auf m_1m', sondern diejenige ihrer inneren Aehnlichkeitsgeraden, auf welcher der äussere Aehnlichkeitspunkt von M_1' und M_2' sich befindet, muss auch mit $A_1A_2A_3$ entweder zusammenfallen oder parallel sein.

Bei der Untersuchung dieses Paragraphen ist gezeigt worden, dass A_1 ein Punkt des ersten Potenzortes der Kreise m_1 und m' ist; dies gilt auf gleiche Weise von A_2 und A_3, woraus sich ergiebt, dass $A_1A_2A_3$ der erste Potenzort der Kreise m_1 und m' sein muss. Auf diesem müssen sich die gemeinschaftliche Tangente zwischen M_1' und m_1 und die zwischen M_1' und m' begegnen, der Schnittpunkt aber muss zugleich auf der Polare des ersten Potenzpunktes der Kreise M_1', M_2', M_3' in Bezug auf M_1' liegen. Deshalb geht die Berührungssehne der eben erwähnten gemeinschaftlichen Tangenten durch diesen ersten Potenzpunkt als den Pol der Polare, andrerseits aber trifft diese, da in ihren Endpunkten die Kreise m_1 und m' ungleichartig berührt werden, den inneren Aehnlichkeitspunkt der letzteren Kreise, als welchen wir bereits P kennen gelernt haben. Hieraus ergiebt sich, dass P der erste Potenzpunkt und $A_1A_2A_3$ eine von den inneren Aehnlichkeitsgeraden derjenigen Ternion von Kreisen ist, welche von M_1', M_2', M_3' gebildet wird. Das Merkmal dieser Ternion besteht darin, dass die Kreise derselben zugleich von den Kreisen m_1 und m' berührt werden; solcher Ternionen, deren Kreise von zweien der acht Berührungskreise zugleich berührt werden, kann man folgende vier bilden:

erste Ternion: M_1', M_2', M_3', berührt von m_1 und m',
zweite „ : M_3', M_1'', M_2'', „ „ m_2 und m'',
dritte „ : M_2', M_1'', M_3'', „ „ m_3 und m''',
vierte „ : M_1', M_2'', M_3'', „ „ m_4 und m''''.

Jede dieser Ternionen hat P zum ersten Potenzpunkt und eine der Aehnlichkeitsgeraden der gegebenen Kreise M_1, M_2, M_3 zu einer ihrer Aehnlichkeitsgeraden, nämlich die erste Ternion $A_1A_2A_3$ zu derjenigen inneren, auf welcher der äussere Aehnlichkeitspunkt von M_1' und M_2' liegt, die zweite $A_1I_3I_2$ zur äusseren, die dritte $A_2I_3I_1$ zu derjenigen inneren, auf welcher der äussere Aehnlichkeitspunkt von M_1'' und M_3'' liegt, und die vierte $A_3I_2I_1$ zu derjenigen inneren, auf welcher der äussere Aehnlichkeitspunkt von M_2'' und M_3'' liegt.

Die Mittelpunkte der die Berührungskreise berührenden Kreise bestimmen mit den Mittelpunkten der gegebenen vier Ternionen von Verbindungsgeraden, nämlich:

erste Ternion: M_1M_1', M_2M_2', M_3M_3'',
zweite „ : M_1M_1', M_2M_2'', M_3M_3',
dritte „ : M_1M_1'', M_2M_2'', M_3M_3'',
vierte „ : M_1M_1'', M_2M_2', M_3M_3'.

Die Geraden jeder Ternion begegnen sich in einem und demselben Punkte (Lehrs. 26.).

Taf. I.

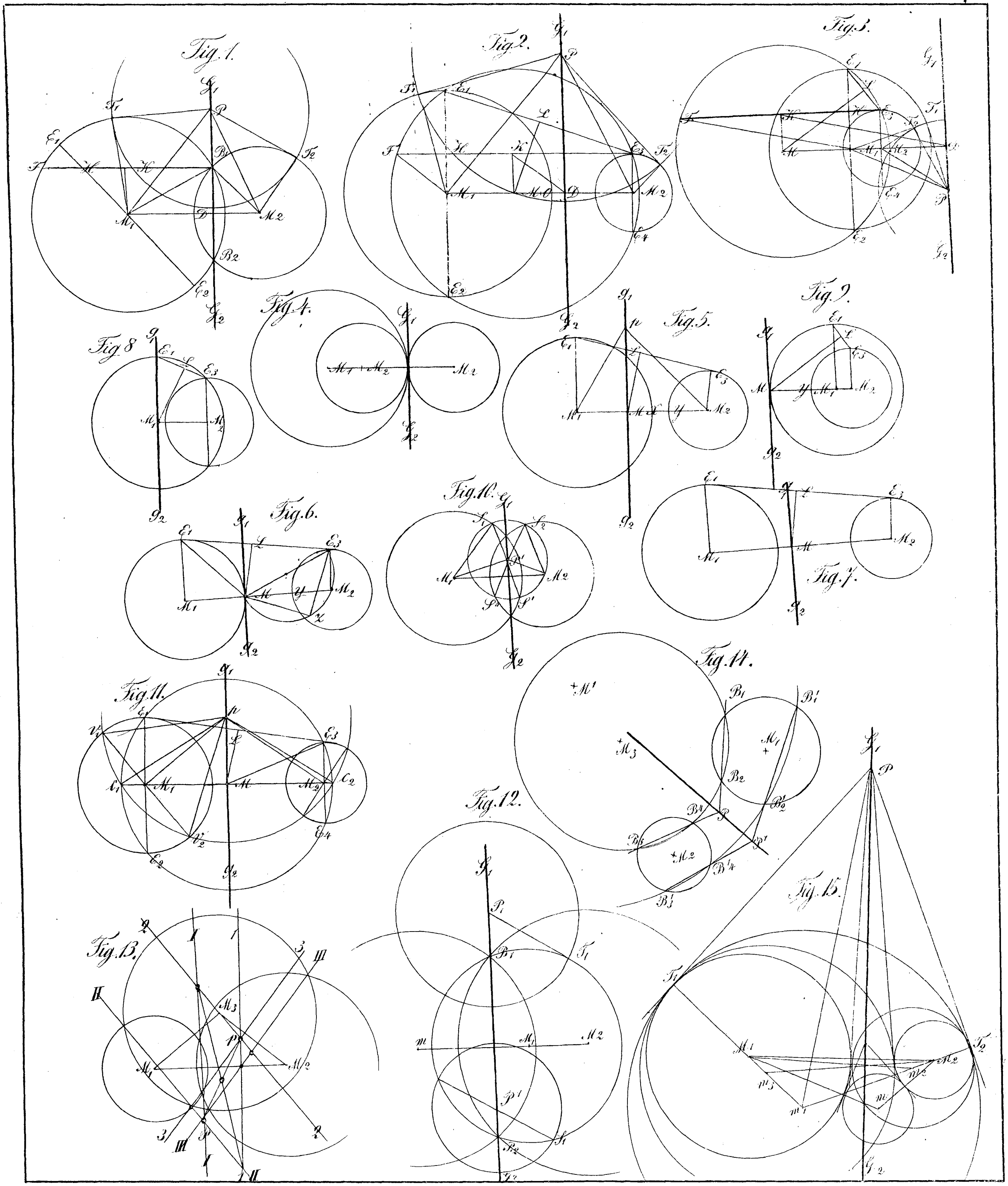


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.

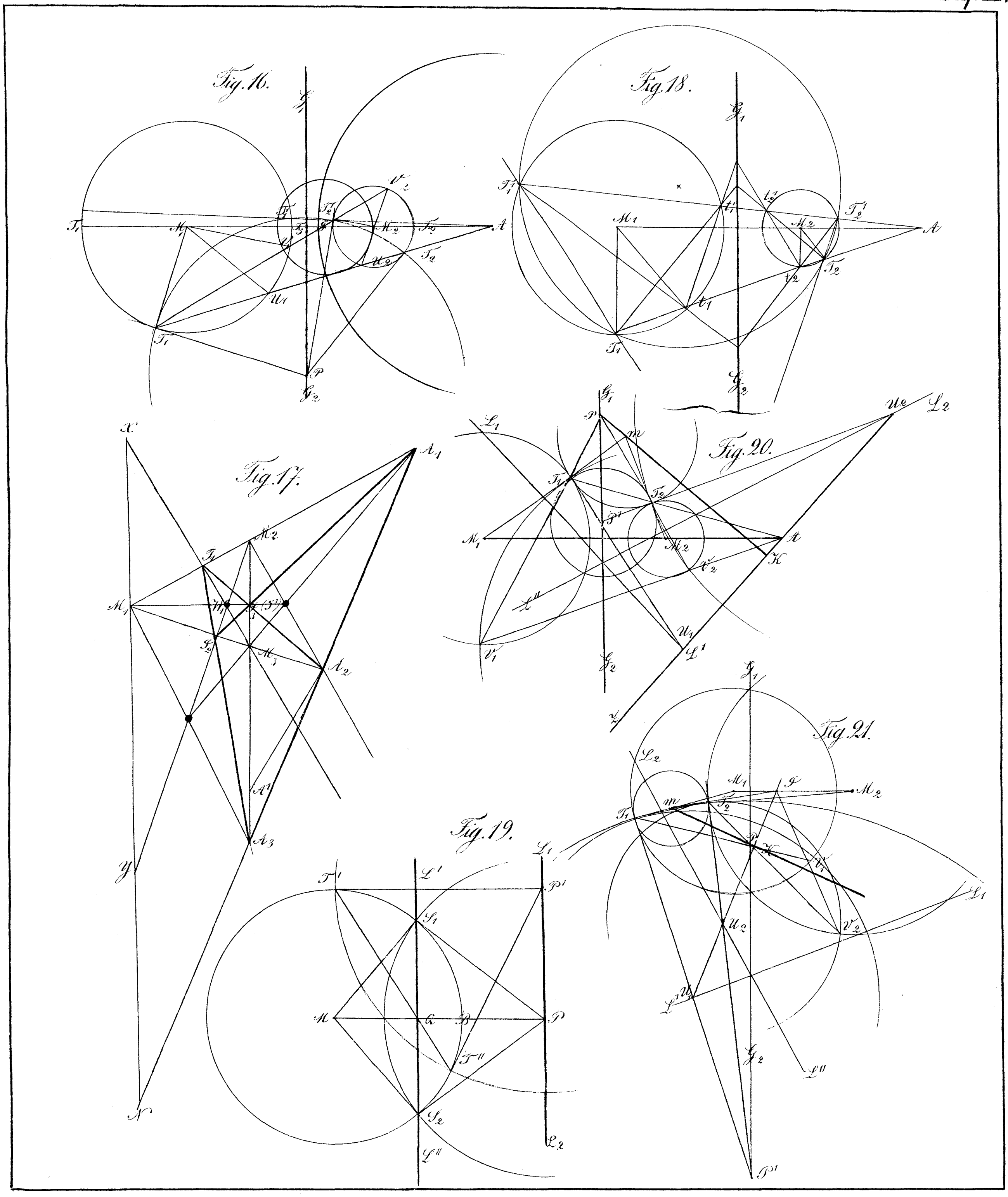
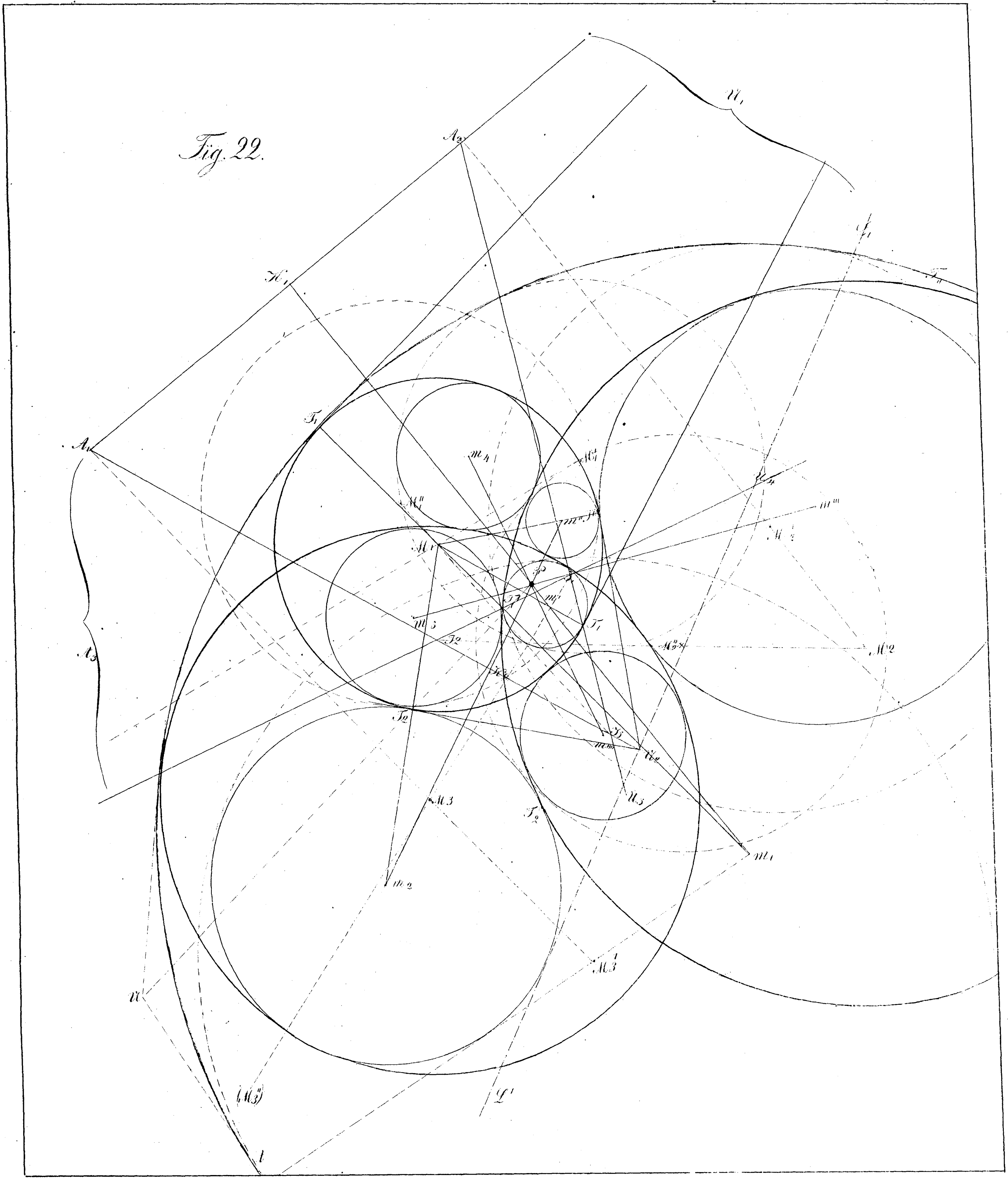


Fig. 16.
Fig. 18.
Fig. 17.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 19.

Fig. 22.



Taf IV.